جامعة محمد خيضر -بسكرة-

السنة الثانية علوم وتقنيات

المقياس: رياضيات 3

25/01/2011

الامتحان النهائي

التمرين الأول:

أدرس طبيعة السلاسل العددية التالية:

1) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^3}$ 2) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)$

3) $\sum_{n\geq 1}\frac{(1!)^1.(2!)^2.(3!)^3....(n!)^n}{(n+1)!}$ 4) $\sum_{n\geq 0}e^n$

التمرين الثاني:

I) لتكن متتالية التوابع: $f_n(x)=\frac{-e^{-x}}{1+n^2x}$, $x\in[0,+\infty[$, $n\in \mathrm{IN}$.

1) أدرس تقاربها البسيط.

2) أدرس تقاربها المنتظم.

II) لتكن سلسلة التوابع $F(x)=\sum_{n\geq 1}f_n(x)$

اثبت أن $F(x)$ مستمر على المجال $[b,+\infty[$ .b>0

التمرين الثالث:

لتكن السلسلة الصحيحة: $f(x)=\sum_{n\geq 0}(n+1)^2x^{2n}$

1) أوجد مجال تقارب هذه السلسلة.

2) اثبت أن السلسلة $f(x)$ متقاربة تقاربا منتظما على المجال $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

3) لتكن $g(x)=\sum_{n\geq 0}(n+1)^2x^n$

أحسب مجموع السلسلة $g(x)$ واستنتج مجموع السلسلة $f(x)$.

بالتوفيق

السنة الثالثة علوم وتقنيات
مقياس: رياضيات 3
25/01/2011

تصحيح امتحان نهائي

التمرين الأول: دراسة طبيعة السلاسل العددية

1) نطبق قاعدة كوشي على السلسلة $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^3}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^3}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\right)^{n} \quad 0{,}25$$

$$=\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}} \quad 0{,}25$$

$$=\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}} \quad 0{,}25$$

$$=\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}} = e^{\lim_{n\to+\infty} n.\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}} \quad 0{,}25$$

$$=e^{+\infty(-1)}=e^{-\infty}=0<1\Rightarrow \quad 0{,}25$$

$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^3}$ متقاربة 0,25

2) $$\sum_{n\geq 1}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}-\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \quad (*)$$

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ سلسلة ريمان متباعدة $(\alpha=1)$ 0,25

$\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ ، $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{n^2}$ 0,5

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ 0,25 سلسلة ريمان متقاربة $(\alpha=2>1)$ ومنه $\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ متقاربة 0,25

حسب السلاسل المتكافئة ومنه (*) متباعدة 0,25

3) نطبق قاعدة دالمبير 0,25 على السلسلة التالية:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(1!)^1(2!)^2\cdots(n!)^n}{(n+1)!}$$

$\lim_{n\to+\infty}$ $\dfrac{\ldots}{(n+2)(n+1)!}$ $\cdot$ $\dfrac{\ldots}{\cancel{(1!)\cdot(2!)^2\cdot(3!)^3\cdots(n!)}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\cdot((n+1)!)^n}{(n+2)} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\cdot n!\cdot e^{n\ln(n+1)!}$$ 0,25

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\cdot \lim_{n\to+\infty} n!\cdot \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(n+1)!}$$ 0,25

$$= 1\cdot+\infty\cdot+\infty = +\infty > 1 \Rightarrow$$ 0,25

0,25 متباعدة $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(1!)(2!)^2\cdots(n!)^n}{(n+1)!}$

نطبق الشرط اللازم للتقارب على السلسلة $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^n$ نجد 0,25

$\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty \neq 0 \Rightarrow$ السلسلة متباعدة 0,25

التمرين الثاني :

1) ① التقارب البسيط :

① $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{-e^{-x}}{1+n^2x} = 0 = f(x)$

② $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x} = 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[\text{simple}]{c.v} f$

② التقارب المنتظم :

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{e^{-x}}{1+n^2x}$$

$\sup g_n$? $\quad g_n'(x) = \dfrac{-e^{-x}(1+n^2x) - e^{-x}(n^2)}{(1+n^2x)^2}$

$$g_n'(x) = \frac{-e^{-x}(1+n^2+n^2x)}{(1+n^2x)^2} < 0$$

$$\left[g_n'(x) \neq 0 \Rightarrow 1+n^2+n^2x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{-(1+n^2)}{n^2}\right]$$

x	0		$+\infty$
$g_n'(x)$		$-$	
$g_n(x)$		$\searrow$	

$$\sup_{[0,+\infty[} g_n(x) = g_n(0) = \frac{e^{-0}}{1+0} = 1 \quad (0,1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[0,+\infty[} g_n(x) = 1 \neq 0 \Rightarrow f_n \cancel{\xrightarrow[\text{unif}]{c.v}} f \quad (0,1)$$

II) $F(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ سلسلة توابع على المجال $[b,+\infty[$

① $f_n(x) = \frac{-e^{-x}}{1+n^2x}$ مستمر على المجال $[b,+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$

② $F(x)$ متقاربة بانتظام؟

ندرس التقارب النظيمي لـ $F(x)$:

$$\sum_{n\geq 1} \sup_{[b,+\infty[} |f_n(x)| = \sum_{n\geq 1} |f_n(b)| = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-b}}{1+n^2b}$$

دراسة تقارب هذه السلسلة نطبق عليها المقارنة:

$$1+n^2b > n^2b \Rightarrow \frac{1}{1+n^2b} < \frac{1}{n^2b}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-b}}{1+n^2b} < \frac{e^{-b}}{n^2b} < \frac{1}{n^2}$$

$$\left[e^b \cdot n^2 b > n^2 \Rightarrow \frac{1}{e^b n^2 b} < \frac{1}{n^2} \right]$$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ سلسلة ريمان متقاربة $(\alpha = 2 > 1)$ ومنه $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-b}}{1+n^2b}$ متقاربة $\Leftarrow$ $F(x)$ متقاربة نظيميا على $[b,+\infty[$ (0,1)

ومنه متقارب بانتظام ...
في ① و ② $f(x)$ مستمر على $[b, +\infty[$

<u>التمرين الثالث :</u>

مجال التقارب :

• حساب شعاع التقارب :

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \right| = 1 \quad 1$$

• السلسلة $f(x)$ متقاربة على $]-1, 1[$ $0{,}5$

• $\underline{x = 1}$: $f(1) = \sum_{n \geq 0} (n+1)^2$ متباعدة هذه السلسلة

حسب الشرط اللازم للتقارب $\lim_{n \to +\infty} (n+1)^2 = +\infty \neq 0$ $0{,}5$

• $\underline{x = -1}$: $f(-1) = \sum_{n \geq 0} (n+1)^2$ متباعدة $0{,}25$

ومنه مجال التقارب هو $]-1, 1[$ $0{,}5$

التقارب المنتظم : لذلك ندرس النظيمي : بتطبيق نظرية فيرشتراس نجد :

$$\forall \quad x \in [0, \tfrac{1}{2}] \Rightarrow \quad x \leq \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x^{2n} \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} \quad 0{,}5$$

$$\Rightarrow (n+1)^2 x^{2n} \leq (n+1)^2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\exists\, C_n = (n+1)^2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} \;/\; |(n+1)^2 x^{2n}| \leq C_n$$

ندرس طبيعة $\sum C_n$ (نطبق دالمبير)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+2)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{(n+1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} = \frac{1}{4} < 1 \quad 0{,}5$$

ومنه $\sum C_n$ متقاربة $\Leftarrow$ $f(x)$ متقاربة نظيميا $\Leftarrow$ $0{,}1$

17

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} (n+1) x^n \quad (3)$$

$$\int \sum_{n\geq 0} (n+1)^2 x^n \, dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)^2}{(n+1)} x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) x^{n+1}$$

0,5

$$= x \sum_{n\geq 0} (n+1) x^n$$

$$\int \sum_{n\geq 0} (n+1) x^n \, dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)}{(n+1)} x^{n+1}$$

0,25

$$= x \sum_{n\geq 0} x^n$$

$\sum_{n\geq 0} x^n$ سلسلة هندسية أساسها x ، متقاربة في $]-1,1[$

0,5

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to+\infty} 1 \, \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x}$$

$$\int \sum_{n\geq 0} (n+1) x^n \, dx = x \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} (n+1) x^n = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2}$$

0,5

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\int \sum_{n\geq 0} (n+1)^2 x^n \, dx = x \sum_{n\geq 0} (n+1) x^n$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

0,25

$$\sum_{n\geq 0} (n+1)^2 x^n = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(1-x)^2 - x(-2(1-x))}{(1-x)^4}$$

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)^2 x^n = \frac{1 - x + \text{[illegible]}}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

استنتاج $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0}(n+1)^2 (x^2)^n$$

0,1

$$= \frac{1+x^2}{(1-x^2)^3}$$