جامعة منتوري قسنطينة
دائرة العلوم الدقيقة والتكنولوجيا
ST2-LMD

امتحان مقياس الرياضيات 3

.التمرين الأول
ادرس طبيعة السلاسل العددية التالية

$$1)\sum_{n>1}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n},2)\sum_{n>0}\frac{n^2(n+1)^2}{n!},3)\sum_{n>1}\frac{(-1)^n}{n^3},4)\sum_{n>1}n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

التمرين الثاني
حل المعادلة التفاضلية التالية بطريقة السلاسل الصحيحة

$xy''+xy'-y=0$
$y(0)=0,\ y'(0)=2$

التمرين الثالث
ليكن التابع 2π دوري المعرف بالشكل

$$f(x)=\begin{cases}-\pi\ ,-\pi<x<0\\ x,0\leq x\leq\pi\end{cases}$$

- مثل بيانيا على المجال$[-3\pi,3\pi]$
- احسب معاملات فوريي الملحقة للتابع

تحقق من شروط ديريكلي وانشر على شكل سلسلة فوريي

التمرين الرابع
لكن سلسلة التوابع المعرفة بحدها العام

$$f_n(x)=\frac{1}{n^2x+n^3},n\geq 1,x\geq 1$$

1- ادرس التقارب بانتظام $\sum_{n\geq 1}f_n(x)$

2-بين أن المجموع $S^{(k)}(x)$ تابع قابل للاشتقاق باستمرار على المجال $[1,\infty[$

بالتوفيق

(1)

تصحيح الامتحان الأول في

مقياس رياضيات 03

Maths03

التمرين الأول: دراسة طبيعة السلاسل العددية

1: $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$

السلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ سلسلة موجبة نطبق قاعدة كوشي.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3}$ (0,5)

نعلم أن:

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (0,25) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{3} = \frac{e}{3} < 1$ (0,5)

ومنه حسب كوشي فهي متقاربة (0,25)

2: $\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} \frac{n^2(n-1)^2}{n!} \longrightarrow$ سلسلة موجبة نطبق دالمبير

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{(n+1)!}$ (0,5) $\cdot \frac{n!}{n^2(n+1)^2} = \lim \left(\frac{n+2}{n}\right)^2 \cdot \frac{n!}{(n+1)n!} = 0 < 1$ (0,5)

إذن هي متقاربة

3 $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3} \longrightarrow$ سلسلة تناوبية (متناوبة)

ندرس التقارب المطلق.

$\left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right| = \frac{1}{n^3}$ (0,5) $\Rightarrow$ سلسلة ريمان $(\alpha=3)>1$ متقاربة إذن

$\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة مطلقا إذن هي متقاربة. (0,5)

2

④ $\sum_{n\geq 1} n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n\geq 1} u_n \Rightarrow$ سلسلة موجبة

0,5 نعلم أن $\sin x \underset{v(0)}{\sim} x \Rightarrow \sin\frac{1}{n^2} \underset{v(\infty)}{\sim} \frac{1}{n^2}$

0,5 وبالتالي: $n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{v(\infty)}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

ومنه: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ سلسلة متباعدة $(\alpha=1)$ ومنه بالمقارنة $\sum_{n\geq 1} n \sin\frac{1}{n^2}$

سلسلة متباعدة 0,5

<u>التمرين الثاني:</u> $x y'' + x y' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

نضع: $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \Rightarrow$ 0,5 $\begin{cases} y' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} \\ y'' = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{cases}$

نعوض في المعادلة فنجد:

$$x\left(\sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}\right) + x\left(\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}\right) - \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} n a_n x^n - \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} (n+1) n\, a_{n+1} x^n + \sum_{n\geq 1} n a_n x^n - \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0 \quad 0,5$$

لأن: 0,5 $\boxed{\sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} n(n+1) a_{n+1} x^n}$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \left((n+1) n\, a_{n+1} + n a_n - a_n\right) x^n - \underbrace{a_0 x^0}_{(n=0)} = 0 \quad 0,5$$

(13) $\Rightarrow \begin{cases} (n-1)n\,a_{n+1} + n a_n - a_n = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 & 0{,}25 \\ a_{n+1} = \dfrac{1-n}{n(n+1)}\, a_n \,,\; n \geq 1 & 0{,}5 \end{cases}$

ومنه:

$0{,}5$
$$\left.\begin{aligned} n=1 &\longrightarrow a_2 = 0 \\ n=2 &\longrightarrow a_3 = 0 \\ n=3 &\longrightarrow a_4 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \geq 2$$

$$y'(0) = a_1 = 2 \quad 0{,}25$$

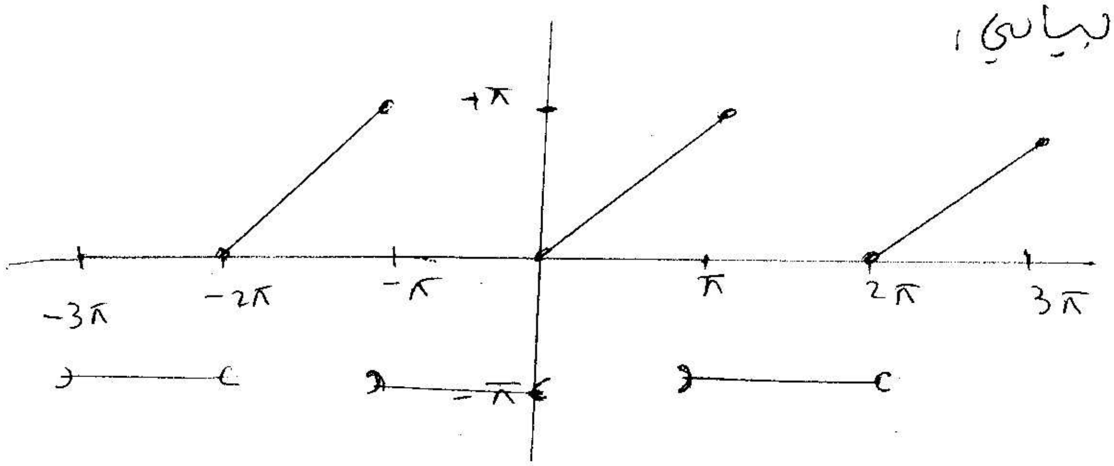
ومنه الحل هو:

$$y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$
$$= a_1 x = 2x \quad 0{,}5$$

التمرين الثالث

$$f(x) = \begin{cases} -\pi \,, & -\pi < x < 0 \\ x \,, & 0 \leq x \leq \pi . \end{cases}$$

① التمثيل البياني:



② حساب معاملات فورييه:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\,dx + \int_0^{\pi} x\,dx\right.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(-x\pi\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \boxed{-\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{a_0 = -\frac{\pi}{4}} \quad 0{,}5$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\pi\cos nx)\,dx + \int_0^{\pi} x\cos nx\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{n}\sin nx \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right] \quad 0{,}5$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{n^2}\boxed{(-1)^n - 1}} \Rightarrow \text{car } \cos n\pi = (-1)^n.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\pi\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx.$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{n} - \frac{2(-1)^n}{n}} \quad 0{,}5$$

إذا كان $\boxed{n}$ زوجي ⇐

$$\begin{cases} b_n = -\frac{1}{n}. \\ a_n = 0 \end{cases}$$

إذا كان n فردي ⇐

$$\begin{cases} a_n = -\frac{2}{(2k+1)^2} \\ b_n = \frac{3}{n} \end{cases}$$

③ إثبات أن f يقبل نشر فوريي:

نتحقق من شروط ديريشلي:

عند $x_0=0$ ⇐

$$- \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = -\pi < \infty, \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0 < \infty$$

عند $x_1=-\pi$ ⇐

$$- \lim_{x \overset{>}{\to} -\pi} f(x) = -\pi < \infty$$

عند $x=\pi$ ⇐

$$- \lim_{x \overset{<}{\to} \pi} f(x) = \pi < \infty$$

وبما أن f مستمر بالقطع على المجال $[-\pi,\pi]$ ، f دوري:

وبالتالي f مستمر بالتقطع على $\mathbb{R}$

عند $\underline{x_0=0}$ $\Leftarrow$ $0{,}1\ f'_d(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0^+)}{h} = \frac{h}{h} = 1 < \infty$

$f'_g(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0^-)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\pi+\pi}{-h} = 0 < \infty$

عند $\underline{x=-\pi}$ $0{,}5\ f'_d(\pi) = 0 < \infty,\ f'_g(\pi) = -1 < \infty$ $0{,}5$

ومنه المشتقات على اليمين وعلى اليسار موجودة إذن f يقبل النشر إلى سلسلة فوري. إذن النشر:

$$f(x) = \frac{-\pi}{4} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx + \left(\frac{1}{n} - \frac{2(-1)^n}{n}\right)\sin nx\right)$$ $0{,}25$

التمرين الرابع: $f_n(x) = \frac{1}{n^2x+n^3}\ ,\ n\geq 1,\ x\geq 1$

① دراسة التقارب النظيمي: $0{,}25$

$$\frac{1}{n^3+n^2x} \leq \frac{1}{n^2+n^3} \leq \frac{1}{n^3}.$$

$\sum \frac{1}{n^3}$ سلسلة ريمان متقاربة $(\alpha=3>1)$ $\Leftarrow$ $\sum f_n(x)$ متقاربة نظيميا

فهي متقاربة بانتظام على $[1,+\infty[$ $0{,}25$

② إثبات أن $S^k(x)$ قابلة للاشتقاق باستمرار على المجال $[1,+\infty[$ أي $S^k(x)$ من الصنف C^1 على $[1,+\infty[$.

نبرهن بالتراجع على $\underline{k}$ $(k\geq 0)$

من أجل $\underline{k=0}$ $\longleftarrow$ الخاصية محققة فعلا لدينا،

$\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ متقاربة ببساطة (لأنها متقاربة نظيميا).

و $\sum f'_n(x)$ متقاربة بانتظام لأن:

$$f'_n(x) = \frac{-n}{(n^2x+n^3)^2} = \frac{-1}{n^2(x+n)^2}$$ $0{,}5$

$$\leq \frac{1}{n^2(n+x)^2} \leq \frac{1}{n^4} = \omega_n$$ $0{,}5$

و $\sum a_n$ سلسلة عددية موجبة ولدينا سلسلة ريمان $\alpha=4>1$ متقاربة

$\Leftarrow \sum f_n'(x)$ متقاربة نقطيا وبالتالي متقاربة بانتظام. 0,25

$$S'(x) = \Big(\sum_{n\geq 1} f_n(x)\Big)' = \sum_{n\geq 1} f_n'(x) \quad 0,25$$

ومنه $S(x)$ من صنف C^1 على $[1,+\infty[$

نفرض أن (k) محققة أي $S^k(x)$ من C^1 على $[1,+\infty[$ ونبرهن صحتها من أجل $(k+1)$.

إذن: $\sum_{n\geq 1} f_n^k(x)$ متقاربة بساطة على $[1,+\infty[$ 0,25 بالتراجع نجد:

$$\left| f_n^k(x) \right| \leq \frac{1}{n^{k+3}} \quad 0,5 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^{k+3}} \text{ متقاربة}$$

وبالتالي $\sum f_n^k(x)$ متقاربة بساطة. 0,5

ولدينا

$$0,5 \quad \left| f_n^{k+1}(x) \right| \leq \frac{1}{n^{k+4}} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^{k+4}} \text{ متقاربة}$$

ومنه الخاصية محققة إذن 1

$S^k(x)$ قابل للاشتقاق باستمرار على $[1,+\infty[$.