جامعة الاخوة منتوري قسنطينة 1 — 25 ماي 2015

سنة اولى علوم و تقنيات

امتحان السداسي الثاني في مقياس الرياضيات 2

التمرين الاول (8ن)

نعتبر المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 4 & 1 & -12 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

1- احسب A^{-1} مقلوب A.

2- احسب القيم الذاتية ل A.

3- اوجد الاشعة الذاتية و الفضاءات الذاتية ل A.

4- استنتج حل جملة المعادلات $AX = B$ حيث $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

التمرين الثاني (4ن)

نعتبر الجملة

$$(S): \begin{cases} x + ay + z = 1 \\ x + (a-1)y + z = -1 \\ x + (a+1)y + (a+1)z = a + 1 \end{cases}$$

حيث $a \in \mathbb{R}$.

1- عين قيم a حتى تكون الجملة (S) جملة كرامر.

2- حل الجملة (S) من اجل $a = 1$ باستعمال طريقة كرامر.

التمرين الثالث (6ن)

ليكن f تابع حقيقي بمتغيرين معرف بالشكل التالي: $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$

1- عين مجموعة تعريف التابع f.

2- ابحث عن القيم القصوى ل f ثم ادرس طبيعتها.

3- احسب التكاملات $I_1 = \iint_D x^2\,dx\,dy$, $I_2 = \iint_D y^2\,dx\,dy$ و $I_3 = \iint_D x^3\,dx\,dy$ حيث

$$D = \{(x,y) \in D_f : 0 \le y \le x \ \wedge \ 0 \le x \le 1\}$$

4- استنتج قيمة التكامل $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

التمرين الرابع (2ن)

احسب التكامل الثلاثي التالي:

$$\iiint_R 4y^3\,dx\,dy\,dz$$

حيث $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le 2, 0 \le x \le z,\ 0 \le y \le \sqrt{z^2 - x^2}\}$.

بالتوفيق

ملاحظة: معاينة اوراق هذا الامتحان ستكون يوم 4 جوان من الساعة 9 الى الساعة 11.

الحل النموذجي لامتحان السداسي الثاني
في مقياس الرياضيات 2.

التمرين 1 : لدينا :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^{t}\mathrm{Com}\,A \quad \ldots \ 0{,}25$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & -2 \\ 4/3 & 1 & -4 \\ 2/3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \ldots \ 2{,}25$$

حساب القيم الذاتية لـ A:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \ldots \ 0{,}25$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -6 \\ 4 & 1-\lambda & -12 \\ 2 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ 0{,}25$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+3)$$

$$= -(\lambda+3)(\lambda-1)^2 = 0 \quad \ldots \ 0{,}5$$

ليست بالضرورة ذكرها

ومنه توجد قيمتان ذاتيتان هما (-3) قيمة بسيطة
و (1) قيمة مضاعفة

0,25

ليست بالضرورة ذكرها.

(0,25)

الأشعة الذاتية المرافقة لـ $\lambda=-3$:

نحل الجملة:

$$(A+3I)X=0_{\mathbb{R}^3} \ldots 0{,}25$$

$$0{,}25 \ldots \begin{cases} 6x-6z=0 \\ 4x+4y-12z=0 \\ 2x-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=2z \end{cases} \ldots 0{,}25$$

ومنه

$$0{,}25 \ldots X=\begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, z\in\mathbb{R}^*$$

$$V_\lambda=\{X\in\mathbb{R}^3 \mid AX=\lambda X\} \ldots 0{,}25$$

$$V_{-3}=\{(z,2z,z)=z(1,2,1) \mid z\in\mathbb{R}^*\} \ldots 0{,}25$$

$$\left[V_{-3}=[(1,2,1)] \Rightarrow \dim V_{-3}=1\right]$$

الأشعة الذاتية المرافقة لـ $\lambda=1$

نحل الجملة

$$0{,}25 \ldots (A-I)X=0_{\mathbb{R}^3}$$

$$0{,}25 \begin{cases} 2x-6z=0 \\ 4x-12z=0 \\ 2x-6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3z \ldots 0{,}25$$

ومنه

$$X=\begin{pmatrix} 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / y,z\in\mathbb{R}^*$$

2^{w}

$$V_1=\{(3z,y,z)=y(0,1,0)+z(3,0,1)\mid y,z\in\mathbb{R}^*\}$$ 0,25

استنتاج حل الجملة $AX=B$

$$AX=B \Rightarrow \underbrace{X=A^{-1}B}_{0,25} \Rightarrow X=\begin{vmatrix}-1/3\\-8/3\\-1/3\end{vmatrix}$$ 0,25 0,25 0,25

التمرين 2:

المشكل المصفوفي لـ (S) هو: $AX=B$

حيث:
$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 1 & a-1 & 1\\ 1 & a+1 & a+1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+1\end{pmatrix}$$

0,5 ... ((S) جملة كرامر $\Leftrightarrow$ $\det A\neq 0$)

$\Leftrightarrow \det A=-a \Leftrightarrow a\neq 0$

0,25 $\det A=(-a)\neq 0 \Rightarrow a\neq 0$ 0,25

ومنه قيم a حتى تكون (S) جملة كرامر هي $a\in\mathbb{R}^*$

حل الجملة من أجل $a=1$ باستعمال طريقة كرامر.

0,25
$$\begin{cases}x+y+z=1\\ x+z=-1\\ x+2y+2z=2\end{cases}$$

الشكل المصفوفي المرافق لها هو:

صدا

$$AX=B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

0,12 ✓ 0,12 ✓ 0,12 ✓

0,2 ✓ … $\det A = -1 = -1$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = 0$$ … 0,12 ✓

0,25

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = 2$$ … 0,12 ✓

0,2 ✓

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = -1$$ 0,18

0,2 ✓

ومنه 0,2 ✓ … $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

التمرين 3:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$$

1- $D_f = \mathbb{R}^2$ … 0,5

2- البحث عن القيم القصوى:

0,2 ✓

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3x^2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \frac{-2}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

0,12 ✓ 0,12 ✓

ol

توجد نقطتان حرجتان هما $(0,0)$ 0,25 ، $(-2/3, 0)$ 0,25

1- دراسة طبيعة النقطة $(0,0)$

$$r = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 2 + 6x \Big|_{(0,0)} = 2 \quad 0,25$$

$$t = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = 2 \quad 0,25$$

$$s = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 0 \quad 0,25$$

ومنه $s^2 - rt = -4 < 0$ 0,25 و $r > 0$ ومنه $(0,0)$ هي نقطة حدية صغرى. 0,25

2- دراسة طبيعة النقطة $(-2/3, 0)$

$$r = \frac{\partial^2 f(-2/3,0)}{\partial x^2} = -2 \quad 0,25$$

$$t = \frac{\partial^2 f(-\frac{2}{3},0)}{\partial y^2} = 2 \quad 0,25$$

$$s = \frac{\partial^2 f(-\frac{2}{3},0)}{\partial x \partial y} = 0 \quad 0,25$$

$s^2 - rt = 4 > 0$

ومنه $(-\frac{2}{3},0)$ هي نقطة سر

$$I_1 = \iint_D x^2\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x x^2\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 . y\right)_0^x dx = \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}. \quad 0{,}5$$

$$I_2 = \iint_D y^2\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x y^2\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3}\right)_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^3}{3}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12}. \quad 0{,}5$$

$$I_3 = \iint_D x^3\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x x^3\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 y\right)_0^x dx = \int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}. \quad 0{,}5$$

استنتاج قيمة التكامل I

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (x^2 + y^2 + x^3)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x x^2\,dy\,dx + \int_0^1 \int_0^x y^2\,dy\,dx + \int_0^1 \int_0^x x^3\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \quad 0,5$$

التمرين الرابع:

$$\iiint_R 4y^3\,dx\,dy\,dz = \int_1^2 \int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{z^2 - x^2}} 4y^3\,dy \right) dx\,dz$$

$$= \int_1^2 \int_0^z \left(y^4 \right)_0^{\sqrt{z^2-x^2}} dx\,dz = \int_1^2 \left(\int_0^z (z^4 + x^4 - 2z^2x^2)\,dx \right) dz$$

$$= \int_1^2 \left[\left(z^4 \cdot x \right)_0^z + \left(\frac{x^5}{5} \right)_0^z - \left(2z^2 \frac{x^3}{3} \right)_0^z \right] dz \quad 2,5$$

$$= \int_1^2 \left(z^5 + \frac{z^5}{5} - \frac{2}{3} z^5 \right) dz = \int^2 \frac{8}{\ } z^5\,dz = \frac{28}{\ }$$

استنتاج قيمة التكامل I

$$I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\int_0^x \left(x^2+y^2+x^3\right)dy\,dx$$

$$=\int_0^1\int_0^x x^2\,dy\,dx+\int_0^1\int_0^x y^2\,dy\,dx+\int_0^1\int_0^x x^3\,dy\,dx$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15} \quad 0,5$$

التمرين الرابع :

$$\iiint_R 4y^3\,dx\,dy\,dz=\int_1^2\int_0^z\left(\int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} 4y^3\,dy\right)dx\,dz$$

$$=\int_1^2\int_0^z \left(y^4\right)_0^{\sqrt{z^2-x^2}}dx\,dz=\int_1^2\left(\int_0^z \left(z^4+x^4-2z^2x^2\right)dx\right)dz$$

$$=\int_1^2\left[\left(z^4\cdot x\right)_0^z+\left(\frac{x^5}{5}\right)_0^z-\left(2z^2\frac{x^3}{3}\right)_0^z\right]dz \quad 2$$

$$=\int_1^2\left(z^5+\frac{z^5}{5}-\frac{2}{3}z^5\right)dz=\int_1^2 \frac{8}{\cdots}z^5\,dz=\frac{28}{\cdots}$$