Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Domaine : Sciences de la Matière
Département de Physique / SM

Année 2010/2011
Semestre 1
Année d'étude : 1ère année SM
27 Juin 2011 (13h30-15h30)

~ Examen Final ~
Matière: *Compléments Mathématiques 1*

Exercice n°1 *(06 points)*

Dans un repère orthonormé *OXYZ,* de base $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs :

$\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

1. Représenter les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

2. Calculer $\|\vec{v}_1\|$, $\|\vec{v}_2\|$ et les produits $\vec{v}_1.\vec{v}_2$ et $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

3. Calculer l'angle θ formé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

4. Montrer que le vecteur $\vec{v}_3 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ est perpendiculaire au plan (*P)* formé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

5. Montrer que le vecteur $\vec{v}_4 = 2\vec{i} - \vec{k}$ appartient au plan *(P).*

Exercice n°2 *(03 points)*

Dans un repère orthonormé *OXYZ*, de base $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$. Ils sont donnés à tout instant *t* par : $\vec{V}(t) = sin(t)\,\vec{i} + cos(2t)\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$, $\vec{W}(t) = e^{-t}\,\vec{i} - 2cos(3t)\,\vec{j} + sin(3t)\,\vec{k}$.

1. a. Déterminer $\vec{V}$ et $\vec{W}$ à l'instant $t_0 = 0$.

b. Déterminer $\dfrac{d\vec{V}}{dt}$ et $\dfrac{d\vec{W}}{dt}$ à l'instant $t_0=0$.

2. Déterminer l'instant t_1 où le vecteur $\vec{H}(t) = e^{2t}\,\vec{i} + cos(3t)\,\vec{j} - 2sin(3t)\,\vec{k}$ est perpendiculaire à $\vec{W}$.

Exercice n°3 *(04 points)*

Considérant deux points, *A* et *B,* donnés en coordonnées cartésiennes par : $A(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$, $B(0,1,0)$.

1. Représenter ces deux points dans la base cartésienne $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

2. Donner les coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) et sphériques (r,θ,φ) de ces points, respectivement dans les bases locales $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$.

Exercice n°4 *(03 points)*

Dans un plan *XOY*, un point *M* est repéré à tout instant *t* par ses coordonnées polaires (r,θ) telles que :

$$r(t) = a\,cos(\omega t)$$
$$\theta(t) = \omega t$$

Où *a* et ω sont des constantes positives, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et $\theta = (\widehat{OX,\vec{r}})$.

1. Dans la base locale $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$, associée aux coordonnées polaires, déterminer les vecteurs $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$.

2. Toujours dans la même base, déterminer puis représenter les vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{v}_1$ à l'instant $t_1 = \pi/(4\omega)\ s$.

Exercice n°5 *(04 points)*

Dans le plan *XOY* muni d'une base orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère la conique *(C)* de foyer $F(1,-1)$, de directrice (*D)* d'équation $x=5$ et d'excentricité $e = 1/3$.

1. Quelle est la nature de *(C)* (ellipse, hyperbole ou parabole).

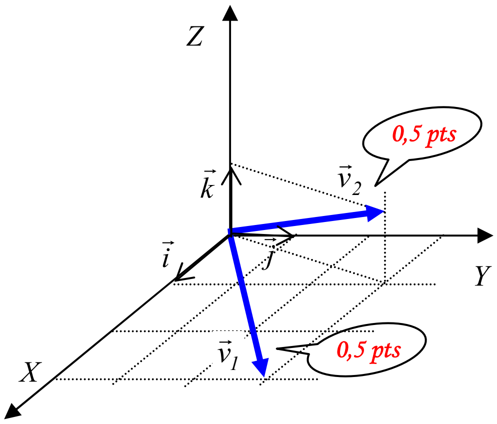
2. a. Dans la base $(O,\vec{i},\vec{j})$, représenter : le foyer *F,* l'axe focal *(Δ)* et la directrice *(D).*

b. Déterminer l'équation de *(C)* dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Bon courage

~ Corrigé : Examen Final ~
Matière: *Compléments Mathématiques 1*

Exercice n°1 *(06 points)*



1. *Représentation des* vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$: $\rightarrow$ *Figure ci-contre.*

2. $\boxed{\|\vec{v}_1\| = \sqrt{18}}$ 0,5 pts $\boxed{\|\vec{v}_2\| = \sqrt{11}}$ 0,5 pts

$\boxed{\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = 12}$ 0,5 pts $\boxed{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}}$ 0,5 pts

3. *Angle* θ formé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

On a : $\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| . \|\vec{v}_2\| . \cos\theta$ 0,5 pts

$$\rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{v}_1 . \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| . \|\vec{v}_2\|} = \frac{12}{\sqrt{18}\sqrt{11}} \rightarrow \boxed{\theta \approx 31.47°}$$ 0,5 pts

4. $\vec{v}_3 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \quad \perp (P)$

$$\vec{v}_3 \perp (P) \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_3 \perp \vec{v}_1 \\ et \\ \vec{v}_3 \perp \vec{v}_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_3 . \vec{v}_1 = 0 \\ et \\ \vec{v}_3 . \vec{v}_2 = 0 \end{cases}$$ 0,5 pts

On a : $\begin{cases} \vec{v}_3 . \vec{v}_1 = 3 - 3 = 0 \\ et \\ \vec{v}_3 . \vec{v}_2 = 1 - 3 + 2 = 0 \end{cases}$ 0,5 pts $\rightarrow$ donc $\vec{v}_3 \perp (P)$

[Autre méthode : On montre que $\vec{v}_3 \,//\, (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)$, c-à-d $\vec{v}_3 \wedge (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) = 0$ ....]

5. $\vec{v}_4 = 2\vec{i} - \vec{k}$ appartient au plan *(P)*.

$\vec{v}_4 = 2\vec{i} - \vec{k} \in (P) \Rightarrow \exists\, \alpha$ et β t.q : $\vec{v}_4 = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$ 0,5 pts

$\rightarrow$ on trouve $\alpha = 1$ et $\beta = -1$ 0,5 pts

$\rightarrow \vec{v}_4 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Donc $\vec{v}_4 \in (P)$

[Autre méthode : On montre que $\vec{v}_4 \perp (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)$, c-à-d : $\vec{v}_4 . (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) = 0$ ....]

Exercice n°2 *(03 points)*

$$\vec{V}(t) = \sin(t)\,\vec{i} + \cos(2t)\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}, \qquad \vec{W}(t) = e^{-t}\,\vec{i} - 2\cos(3t)\,\vec{j} + \sin(3t)\,\vec{k} .$$

1. a. $\vec{V}$ et $\vec{W}$ à l'instant $t_0 = 0$: $\boxed{\vec{V}(0) = \vec{j}}$ 0,5 pts

$\boxed{\vec{W}(0) = \vec{i} - 2\vec{j}}$ 0,5 pts

b. $\frac{d\vec{V}}{dt}$ et $\frac{d\vec{W}}{dt}$ à l'instant t_0 : $\frac{d\vec{V}}{dt} = \cos(t)\,\vec{i} - 2\sin(2t)\,\vec{j} + 2t\,\vec{k} \rightarrow \boxed{\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{t=0} = \vec{i}}$ 0,5 pts

$\frac{d\vec{W}}{dt} = -e^{-t}\,\vec{i} + 6\sin(3t)\,\vec{j} + 3\cos(3t)\,\vec{k} \rightarrow \boxed{\left.\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_{t=0} = -\vec{i} + 3\,\vec{k}}$ 0,5 pts

2. Instant t_1 où le vecteur $\vec{H}$ est perpendiculaire à $\vec{W}$.

$$\vec{H}(t) = e^{2t}\,\vec{i} + \cos(3t)\,\vec{j} - 2\sin(3t)\,\vec{k}\,; \qquad \vec{W}(t) = e^{-t}\,\vec{i} - 2\cos(3t)\,\vec{j} + \sin(3t)\,\vec{k} .$$

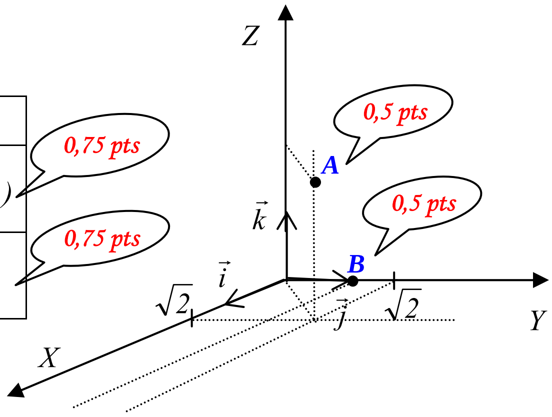
A l'instant t_1, $\vec{H} \perp \vec{W} \Rightarrow \vec{H} . \vec{W} = 0$ 0,5 pts

$$\vec{H} . \vec{W} = e^t - 2\cos^2(3t) - 2\sin^2(3t) = e^t - 2 = 0$$

$\Rightarrow \boxed{t_1 = \ln 2}$ 0,5 pts

Exercice n°3 *(04 points)*

1. Représentation des deux points *A* et *B* : → *Figure ci-contre.*



2. Coordonnées cylindriques et sphériques des points *A* et *B*:

(x,y,z)	(ρ,φ,z)	(r,θ,φ)
$A(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$	$(\rho_A,\varphi_A,z_A)=(2,\frac{\pi}{4},2)$	$(r_A,\theta_A,\varphi_A)=(\sqrt{8},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$
$B(0,1,0)$	$(\rho_B,\varphi_B,z_B)=(1,\frac{\pi}{2},0)$	$(r_B,\theta_B,\varphi_B)=(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

0,75 pts — 0,75 pts — 0,75 pts — 0,75 pts

Exercice n°4 *(03 points)*

1. Vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$ dans la base locale $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$.

$$\vec{r}(t)=\overrightarrow{OM}=r\,\vec{e}_r=a\cos\omega t\,\vec{e}_r\,.$$ 0,5 pts

$$\vec{v}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=a\omega\left[-\sin\omega t\,\vec{e}_r+\cos\omega t\,\vec{e}_\theta\right].$$ 0,5 pts

2. Détermination et représentation des vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{v}_1$ à l'instant $t_1=\pi/(4\omega)\,s$.

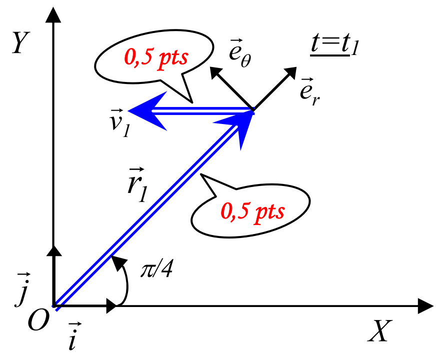
$t(s)$	$\vec{r}$	$\vec{v}$
$t_1=\pi/(4\omega)\,s$	$\vec{r}_1=a\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_r$	$\vec{v}_1=a\omega\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_r+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_\theta\right]$

0,5 pts — 0,5 pts

On a : $\|\vec{r}_1\|=a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\|\vec{v}_1\|=a\omega$.

Représentation des vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{v}_1$ à l'instant t_1 → *figure ci-contre.*



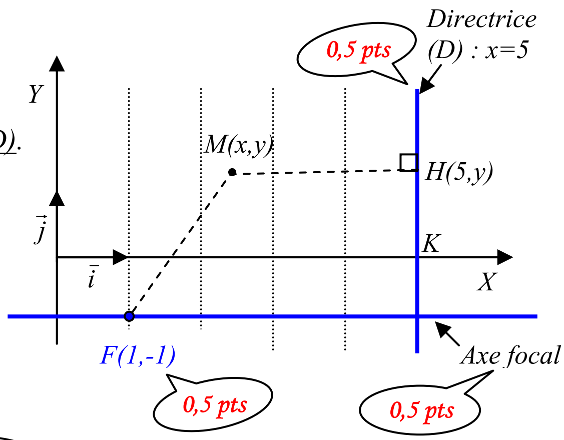
Exercice n°5 *(04 points)*

Conique *(C)* de foyer *F (1,−1)*, de directrice *(D)* d'équation $x=5$ et d'excentricité $e=1/3$.

1. Nature de *(C)* :
Excentricité $e=1/3<1\Rightarrow$ <u>*(C) est une ellipse.*</u> 0,5 pts

2. a. Représentation du <u>foyer *F*</u>, de l'<u>axe focal *(Δ)*</u> et la <u>directrice *(D)*</u>.

→ *Figure ci-contre.*



b. Equation de *(C)* dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On a : $\boxed{\frac{MF}{MH}=e}$ 0,5 pts

$$\frac{MF}{MH}=e\Leftrightarrow MF^2=e^2\,MH^2$$

$$\Leftrightarrow (x-x_F)^2+(y-y_F)^2=\frac{1}{9}(x_H-x)^2$$ 0,5 pts

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=\frac{1}{9}(5-x)^2\;;\qquad (\text{avec } x_H=5)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{8x^2+9y^2-8x+18y-7=0}$$ 01 pt

End