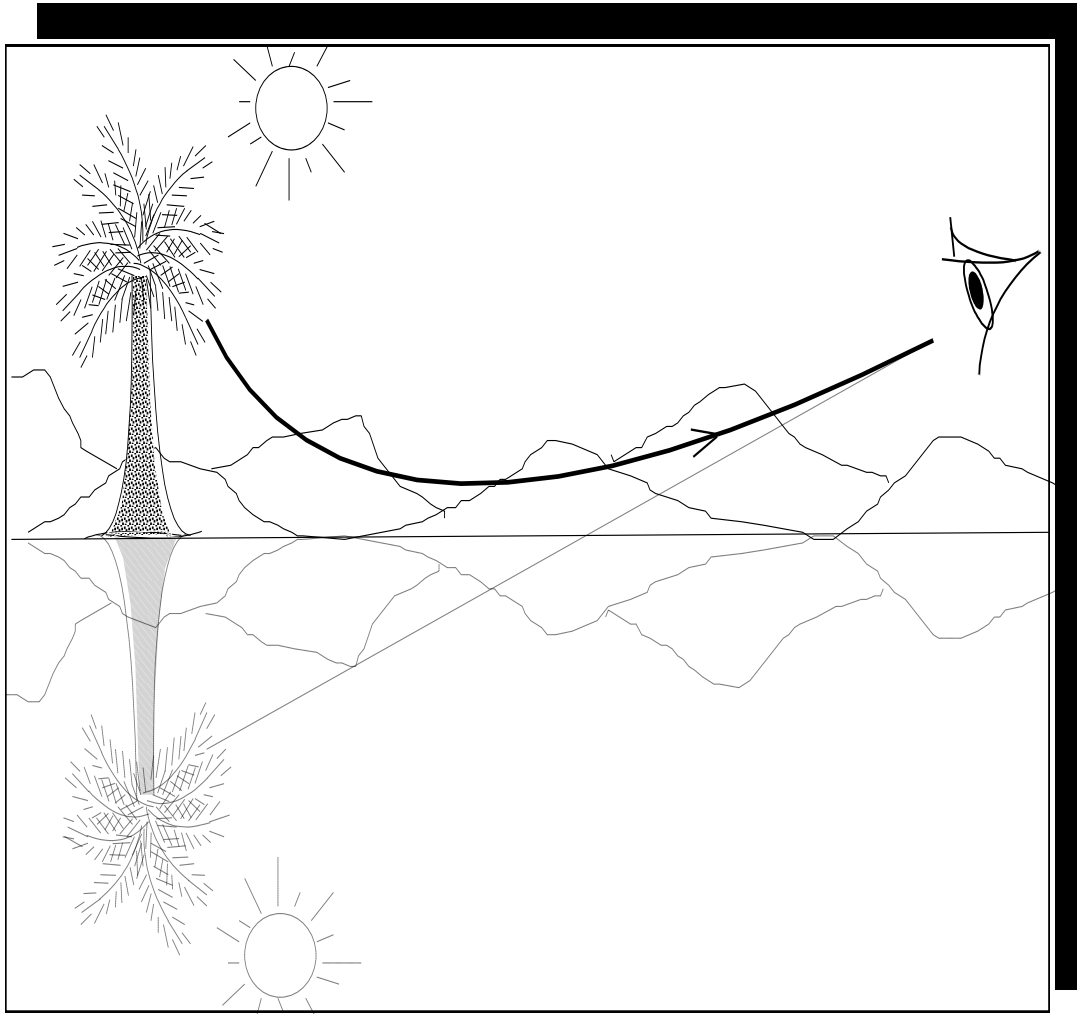


CHAPITRE III

☆☆☆☆☆☆☆☆

LA REFRACTION

☆☆☆☆☆☆☆☆



A. LES LOIS DE LA REFRACTION

A.1 Mise en évidence de la réfraction :

On considère deux milieux (1) et (2) : l'air et l'eau contenue dans un cristalliseur. S est la surface de séparation des deux milieux (fig.III.1).

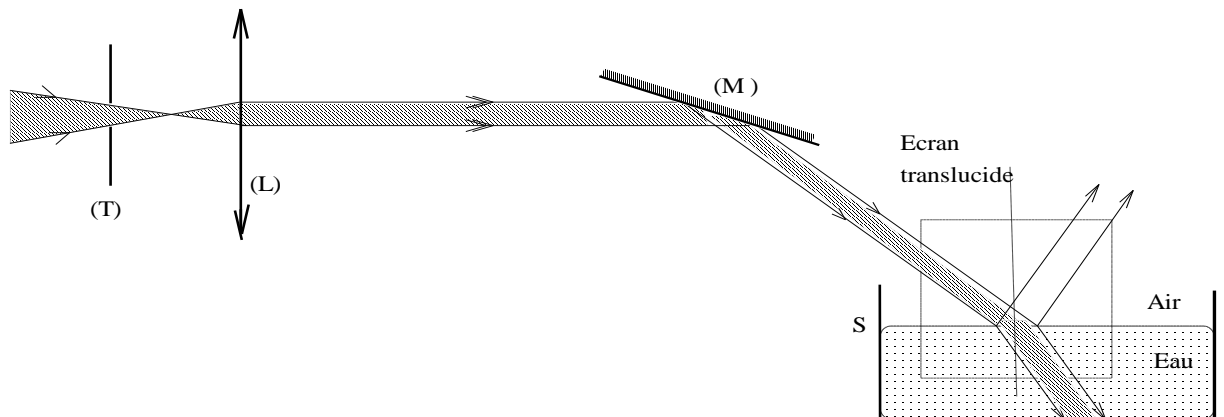
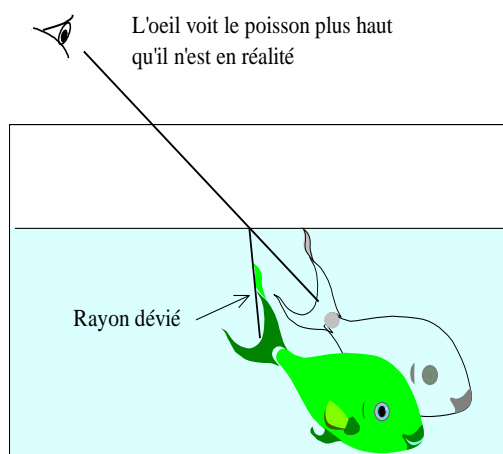


Fig.III.1

Un faisceau lumineux plat est formé à l'aide d'une fente placée horizontalement (T). Le faisceau lumineux peut être rendu visible en introduisant de la fluorescéine dans l'eau et des fumées blanches de chlorure d'ammonium au dessus de l'eau. On peut également placé un écran translucide normalement à S dans le sens de propagation du faisceau lumineux.

On observe **un brusque changement de direction** de ce faisceau à la surface de séparation : c'est le phénomène de la **réfraction** de la lumière.

Pourquoi les objets paraissent-ils plus proches sous l'eau ?



Si l'on essaie de saisir un objet dans un bassin ou une piscine, on s'aperçoit qu'il est plus loin qu'on ne croyait, parce que les rayons lumineux sont déviés lorsqu'ils passent de l'eau dans l'air : c'est **la réfraction**.

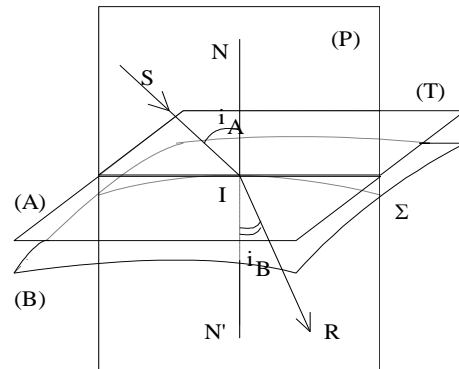
Les rayons lumineux qui partent de l'objet en question se déplacent vers la surface. Lorsqu'ils passent dans l'air, le changement de milieu provoque leur déviation.

Comme nos yeux ont l'habitude de recevoir des rayons lumineux en ligne droite, nous prolongeons inconsciemment le trajet sous l'eau; ainsi l'objet observé paraîtra plus près, sous la surface, qu'il n'est en réalité.

A.2 Les lois de la réfraction ou lois de Descartes :

Ces lois ne s'appliquent en toute rigueur qu'à de la lumière monochromatique (une seule couleur). Nous donnons quelques définitions analogues à celles qui ont été données à propos de la réflexion.

Soit Σ la surface séparant deux milieux (A) et (B) transparents, homogènes et isotropes. Le rayon incident SI, qui se propage dans le milieu (A) et rencontre la surface Σ au point d'incidence I, est déterminé par le plan d'incidence (P), défini par SI et la normale IN, et par l'angle d'incidence i_A que SI fait avec IN.



Dans le milieu (B), le rayon réfracté IR fait avec la normale l'angle de réfraction i_B (fig.III.2.).

Nous pouvons énoncer les lois de Descartes.

Fig.III.2

*** Première loi**

* * * * *

* **Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence** *

* * * * *



*** Deuxième loi**

* * * * *

* * **Il y a un rapport constant entre les sinus des angles d'incidence** *

* **et de réfraction :** $\frac{\sin i_A}{\sin i_B} = cste$ * * * * *

*

A.3 Principe de Fermat:

Ce principe permet de retrouver les précédentes lois. Il s'énonce comme suit: **le trajet suivi par la lumière pour aller d'un point quelconque A_1 à un autre point quelconque A_2 est celui dont la durée est minimum (ou maximum).**

On retrouve tout de suite comme conséquence le premier principe de la propagation rectiligne de la lumière. En effet si A_1 et A_2 sont dans un milieu homogène et isotrope, le trajet de plus courte durée est la ligne droite.

Retrouvons maintenant les lois de Descartes relatives à la réfraction:

Soit Σ la surface séparant le milieu (1) dans lequel la lumière se propage à la vitesse V_1 du milieu (2) dans lequel la lumière se propage à la vitesse V_2 (fig.III.3). Soit le rayon A_1IA_2 qui se réfracte en I sur Σ , selon le principe de Fermat le temps que met la lumière pour aller de A_1 en A_2 est :

$$t = \frac{IA_1}{V_1} + \frac{IA_2}{V_2}$$

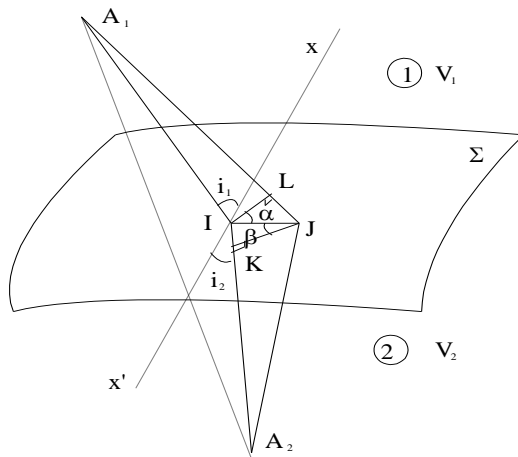


Fig.III.3

Prenons sur Σ un point J tel que le **segment IJ soit pris comme infiniment petit de premier ordre c'est à dire $IJ \ll A_1I$ et A_2I .** supposant que la lumière au lieu de suivre le trajet A_1IA_2 (ce qu'elle fait en réalité !) elle suive le trajet A_1JA_2 ; alors elle mettra le temps $t + \Delta t$ pour effectuer ce parcours et :

$$t + \Delta t = \frac{JA_1}{V_1} + \frac{JA_2}{V_2}$$

de sorte que (avec les notations définies sur la figure):

$$\Delta t = \frac{JA_1 - IA_1}{V_1} + \frac{JA_2 - IA_2}{V_2} = \frac{JL}{V_1} - \frac{IK}{V_2} = IJ \left[\frac{\sin \alpha}{V_1} - \frac{\sin \beta}{V_2} \right]$$

dire que la durée t du trajet A_1IA_2 est minimum (ou maximum) revient à dire que la dérivée de t par rapport à la position du point I est nulle, soit que

(d'après la définition de la dérivée) $\lim_{IJ \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta t}{IJ} \right) = 0$ mais $\frac{\Delta t}{IJ} = \frac{\sin \alpha}{V_1} - \frac{\sin \beta}{V_2}$

$$\text{d'où l'on tire : } \frac{\sin \alpha}{V_1} = \frac{\sin \beta}{V_2}$$

au second ordre près d'approximation, le segment IJ est perpendiculaire à $x'x$ d'où: $\alpha = i_1$ et $\beta = i_2$ par conséquent :

$$\frac{\sin i_1}{V_1} = \frac{\sin i_2}{V_2}$$

soit: $\sin i_1 = \frac{V_1}{V_2} \sin i_2 = n \sin i_2$ et l'on voit apparaître le fait que l'indice de (2) par rapport à (1) est égal au rapport des vitesses de la lumière dans (1) et (2).

Remarque: Soit c la vitesse de la lumière dans le vide, c/V_1 est l'indice du milieu (1) par rapport au vide. Nous l'appellerons indice absolu de (1) et le noterons N_1 . La même chose peut être faite pour (2) et on a :

$$N_1 \cdot \sin i_1 = N_2 \cdot \sin i_2$$

Cette forme symétrique de la loi de Descartes illustre le principe du retour inverse de la lumière.

A.4 Vérifications expérimentales :

Pour vérifier les lois de Descartes, on utilise un bloc de Plexiglas ayant la forme d'un demi-cylindre A, est solidaire d'un disque B sur lequel est tracé un cercle gradué; l'axe du cylindre coïncide avec le centre I du cercle. Les quatre quarts de cercle sont gradués de 0° à 90° à partir de la normale à la face plane du cylindre (fig.III.4).

Un dispositif d'éclairage E fait tomber en I un faisceau lumineux très étroit ; le pinceau réfracté arrive normalement sur la face cylindrique et la traverse sans être dévié; on voit sur le disque les traces lumineuses des pinceaux incident et réfracté; il est donc facile de mesurer les angles d'incidence i dans l'air et de réfraction r dans le Plexiglas.

On vérifie que le rapport $\sin i / \sin r$ est constant; l'indice de l'air étant égal à 1, la valeur de ce rapport est l'indice du bloc de Plexiglas.

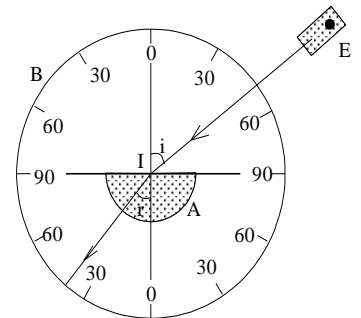


Fig.III.4

B. REFRACTION LIMITE. REFLEXION TOTALE

B.1 Réfraction limite :

Les lois énoncés auparavant déterminent seulement la direction du rayon réfracté connaissant celle du rayon incident. Nous allons maintenant reprendre l'étude de la réfraction pour en préciser certaines modalités et en tenant compte de l'existence de la lumière réfléchie.

Les deux milieux que nous considérons sont l'air, d'indice 1 et un milieu plus réfringent (verre, eau, etc.), d'indice n . Nous distinguerons deux cas, suivant que la lumière incidente se propage dans l'air ou dans le milieu réfringent.

a- Premier cas: lumière incidente dans l'air

On reprend le dispositif précédent constitué par le demi-cylindre en Plexiglas solidaire d'un cercle gradué; on fait tomber le faisceau lumineux SI sur la face plane, sous une incidence assez faible, environ 25° . la plus grande partie de la lumière se réfracte et pénètre dans le Plexiglas, mais il y a aussi un pinceau réfléchi IS', très faiblement lumineux, sa direction est déterminée par les lois de la réflexion.

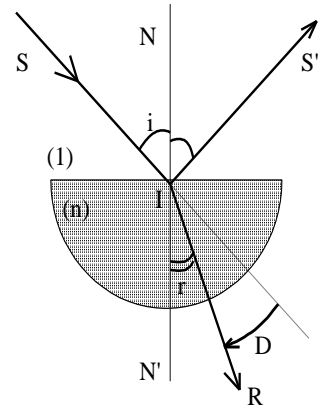


Fig.III.5

On constate que le rayon réfracté IR est moins écarté de la normale N'N que le rayon incident SI. Cela est conforme à la relation de Descartes qui s'écrit :

$$\sin i = n \sin r$$

comme $n > 1$, on a $\sin r < \sin i$, ou $r < i$.

Lors de la réfraction, le rayon lumineux est dévié; la déviation D est l'angle que fait le rayon réfracté avec le prolongement du rayon incident (fig.III.5) :

$$D = i - r$$

Nous allons envisager quelques cas : le rayon qui tombe normalement sur la surface n'est pas dévié : $i = 0$ entraîne $r = 0$, donc $D = 0$.

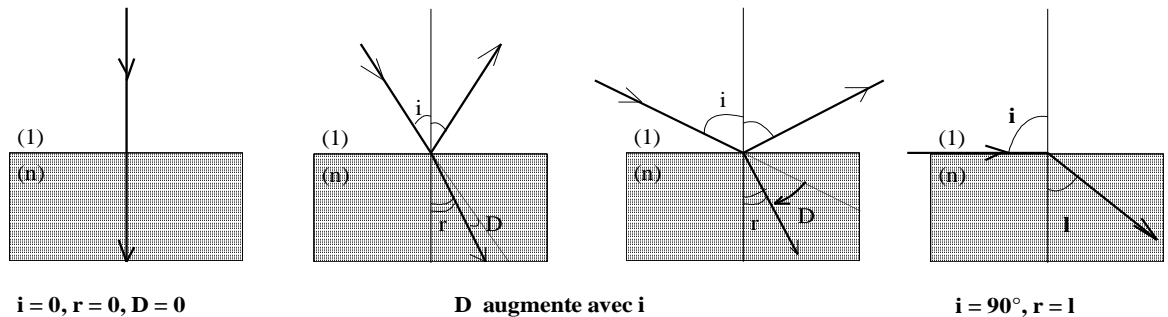


Fig.III.6

Si on augmente progressivement i , on constate que l'angle de réfraction croît avec l'angle d'incidence, mais moins vite que lui; il en résulte que la déviation augmente avec l'incidence.

Lorsque l'incidence est grande, l'intensité du faisceau réfléchi, qui était restée faible, se met à croître de façon notable, donc celle du faisceau réfracté diminue. Enfin lorsque l'incidence tend vers 90° , l'angle de réfraction tend vers une valeur limite l (fig.III.6).

La formule de Descartes permet de calculer l'angle limite l :

$$\sin 90^\circ = 1 = n \sin l$$

$$\sin l = \frac{1}{n}$$

Cette formule permet de connaître les valeurs de l'angle limite pour quelques substances :

eau	$n = 1,33$	$l = 49^\circ$
verre	$n = 1,52$	$l = 42^\circ$

b- Deuxième cas : lumière incidente dans le milieu réfringent

On utilise le même dispositif que précédemment de telle façon que le pinceau lumineux incident tombe normalement sur la face cylindrique; il pénètre dans le Plexiglas sans être dévié et arrive en I sur la face plane (fig.III.7). On prend un angle d'incidence assez faible, environ 25° ; la plus grande partie de la lumière se réfracte et sort dans l'air; mais il y a aussi un pinceau réfléchi, faiblement lumineux.

La direction du faisceau réfléchi IS' est donnée par les lois de la réflexion, qu'on vérifie aisément.

On constate que le rayon réfracté IR est plus écarté de la normale que le rayon incident SI . Cela est conforme à la relation de Descartes qui s'écrit :

$$n \sin i = \sin r$$

comme $n > 1$, on a bien : $\sin r > \sin i$, ou $r > i$.

Lors de la réfraction, le rayon subit une déviation : $D = r - i$
c'est l'angle du rayon réfracté IR avec le prolongement du rayon incident SI (fig.III.7).

On envisage dans ce cas aussi quelques exemples: si $i = 0$, on a $r = 0$, donc $D = 0$: un rayon qui tombe normalement sur la face plane sort dans l'air sans être dévié.

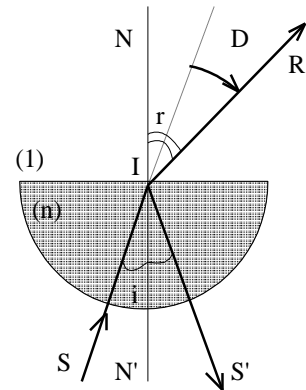


Fig.III.7

Lorsqu'on fait croître l'incidence i , l'angle r croît, et même plus vite que i ; il en résulte que la déviation augmente avec l'incidence. En même temps, l'intensité du rayon réfléchi augmente et celle du rayon réfracté diminue.

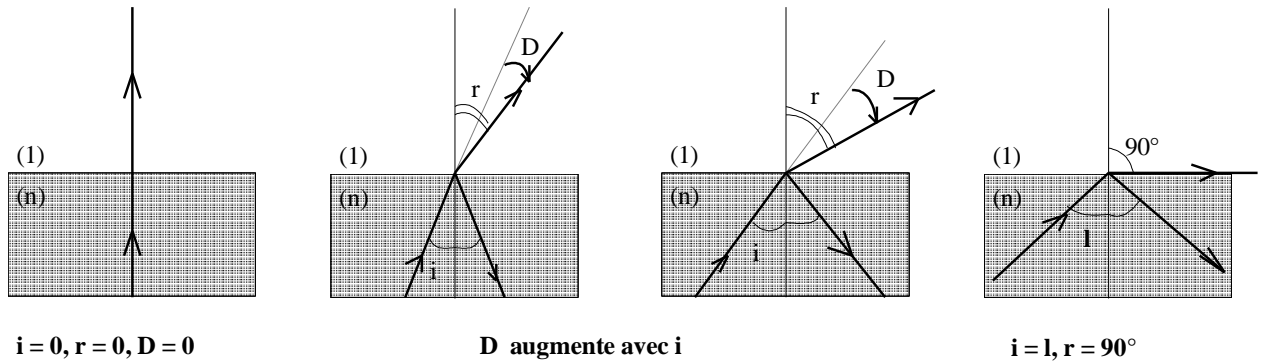


Fig.III.8

Lorsque l'angle d'incidence est égal à l'angle limite, le rayon réfracté sort dans l'air tangentiellement à la surface, $r = 90^\circ$ (fig.III.8).

Si l'angle d'incidence est supérieur à l'angle limite l , il n'y a plus de pinceau réfracté; toute la lumière passe dans le faisceau réfléchi : C'est le phénomène de la **réflexion totale**.

Ainsi si $i > l$, on a :

$$\sin i > \frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad n \sin i > 1$$

Il ne peut pas y avoir d'angle r tel que $\sin r = n \sin i$. En conclusion, il convient de distinguer deux cas :

- Si $i \leq l$, la lumière est partiellement réfractée et partiellement réfléchie;
- Si $i > l$, elle est totalement réfléchie.

B.2 Réflexion totale :

Un rayon lumineux, se propageant dans un milieu réfringent d'indice n et arrivant sur la surface séparant ce milieu de l'air, se réfléchit totalement si son incidence est supérieur à l'angle limite l défini par :

$$\sin l = \frac{1}{n}$$

D'une façon générale, on observe ce phénomène quand la lumière tombe sous une incidence suffisamment grande sur la surface séparant un milieu réfringent d'un autre milieu moins réfringent.

Nous allons maintenant signaler quelques applications.

1° Mesure d'un indice:

Pour mesurer l'indice d'un liquide, on utilise le schéma décrit sur la figure III.9. A la partie supérieure d'un bloc ABCD d'indice n' connu, on dépose une goutte de liquide d'indice n à mesurer.

Un rayon incident tombe sur la surface de séparation verre-liquide. On mesure l'angle de réflexion totale λ .

D'après la relation $n = n' \sin \lambda$ et, en connaissant n' et λ , on en déduit n .

Cette méthode n'est applicable que pour des liquides d'indice $n < n'$ et est utilisée dans les réfractomètres de Pullfrich et d'Abbe.

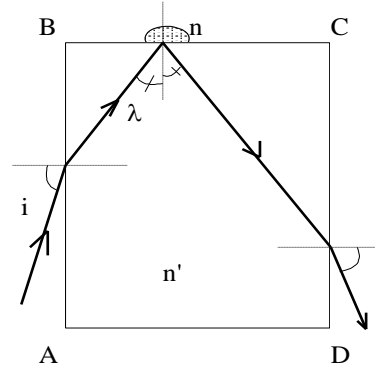


Fig.III.9

2°/ Conduction de la lumière :

En réalisant le montage de la figure III.10,

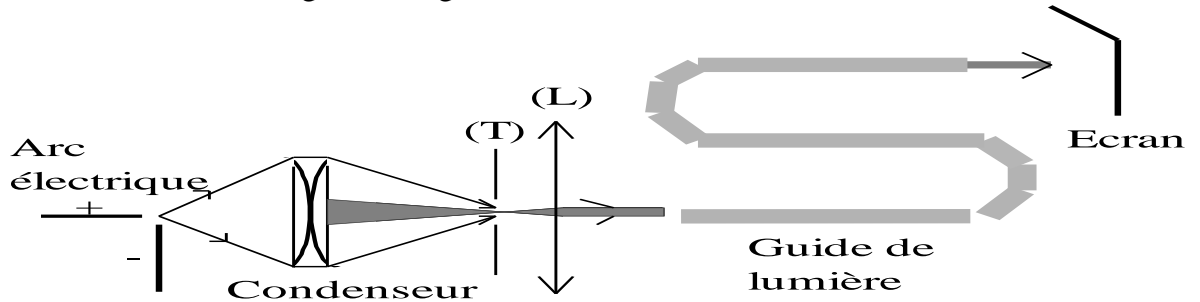


Fig.III.10

On constate que tous les rayons circulant dans le tube tombent sur sa paroi avec des angles supérieurs à l'angle de réfraction limite λ . Il y a donc toujours réflexion totale à l'intérieur.

Application : Endoscopie

Cette conduction de la lumière par de très fines fibres de verre explique le fonctionnement d'appareils "d'optique à fibres" destinés à l'examen de cavités de l'organisme (endoscopes).

Le schéma suivant (fig.III.11) montre un endoscope médical à fibre de verre, appareil utilisant la "conduction" de la lumière par un cylindre de petite section. La lampe alimentée par la broche, éclaire l'intérieur de l'organe. Un prisme à réflexion total (voir 4°) et une lentille objectif forment l'image de la partie observée sur l'extrémité A du faisceau de fibres. Le faisceau, formé d'environ 150 000 fibres, a un

diamètre de 6,2 mm. Chaque fibre transmet la lumière qu'elle reçoit; à l'extrémité B du faisceau on obtient donc une image identique à celle formée sur A.

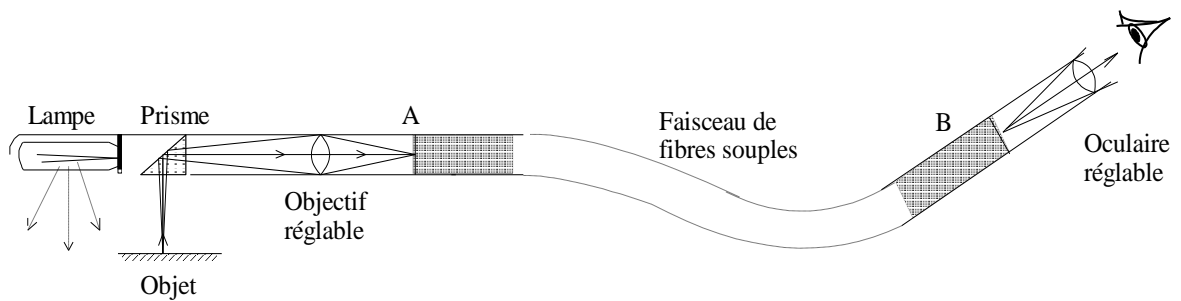


Fig.III.11

A quoi servent les fibres optiques ?

Les fibres optiques permettent aux médecins de regarder ce qui se passe à l'intérieur du corps humain sans intervention chirurgicale. Elles sont aussi utilisées dans certains centres téléphoniques pour acheminer mille fois plus de communications qu'un câble classique. Elles servent aussi à transporter des images grâce au rayon laser et, associées au téléphone, elles donnent l'apparition du visiophone : nous pourrions voir notre correspondant sur écran .

3°/ Fontaines lumineuses :

Une application semblable au phénomène précédent peut être montrée à l'aide de la figure ci-contre (fig.III.12). Le trajet du faisceau lumineux est rendu visible en utilisant de l'eau additionnée de fluorescéine.

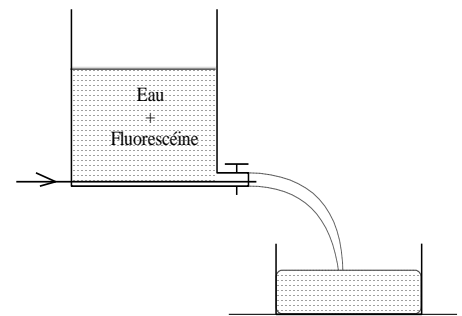


Fig.III.12

4°/ Prismes à réflexion totale.

L'intersection d'un prisme à réflexion totale par un plan perpendiculaire à son arête est un triangle rectangle isocèle.

Un tel prisme peut être utilisé de deux manières différentes :

⦿ Le rayon incident SI tombe normalement sur une face correspondant à un côté de l'angle droit; le rayon émergent IT est perpendiculaire à SI.

⦿ Le rayon incident tombe sur la face hypoténuse. Le rayon émergent est parallèle au rayon incident (fig.III.13).

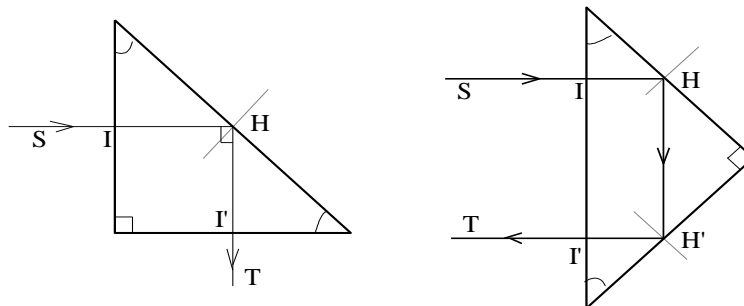


Fig.III.13

5°/ Phénomène des mirages :

On dépose du sucre au fond d'un bac parallélépipédique. On verse ensuite de l'eau, très lentement pour obtenir une solution de concentration variable (eau et sucre). Le mélange obtenu a des indices croissants de la surface vers le fond du récipient. En éclairant comme l'indique la figure ci-contre (fig.III.14), on obtient la réflexion totale. Cette expérience est semblable au phénomène de mirages.

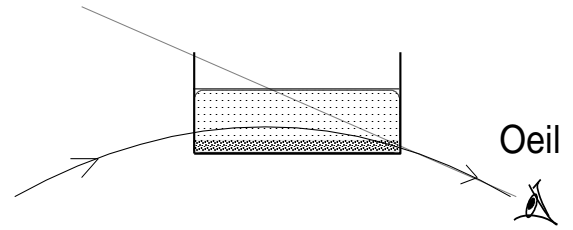


Fig.III.14

Dans le désert à la fin d'une journée, l'air au voisinage du sol est à une température T_1 supérieure à la température T_0 des couches supérieures. La masse volumique ρ étant une fonction inverse de la température

$$T_1 > T_0 \Rightarrow \rho_1 < \rho_0$$

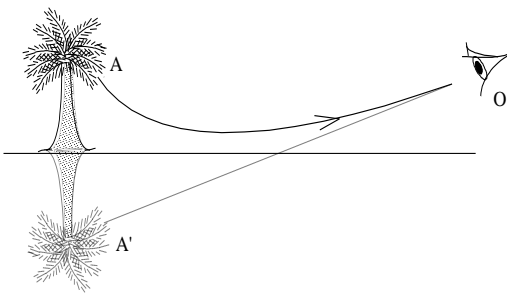


Fig.III.15

La loi de Gladstone, appliquée à une substance d'indice n et de masse volumique ρ , donne $\frac{n-1}{\rho} = cste$, donc $n_1 < n_0$. L'indice de l'air près du sol est inférieur à celui des couches supérieures. Un rayon issu de A va se réfracter en s'écartant de la normale (fig.III.15). A un certain moment, il y aura réflexion totale. Un observateur placé en O

semblera voir les rayons issus de A' .

6°/ Les "feux" du diamant :

Pour le diamant, d'indice très grand, $n = 2,4$, l'angle limite de réfraction est assez petit, $l = 25^\circ$. Un observateur regardant un diamant reçoit en général un pinceau qui, provenant d'une source lumineuse, est entré par réfraction dans le diamant et y a subi une ou plusieurs réflexions totales : ainsi s'expliquent les "feux" de cette pierre précieuse.

C. STIGMATISME ET APLANETISME

1. Système optique:

Un système optique est un ensemble de milieux transparents et homogènes disposés les uns à la suite des autres et séparés par des surfaces en général planes, sphériques, paraboliques...si toutes ces surfaces sont de révolution autour du même axe, le système est centré.

2. Image d'un point lumineux:

Soit un système optique dont les faces d'entrée et de sortie sont S_1 et S_2 . Soit un point lumineux A qui envoie sur S_1 un faisceau divergent. Considérons le **point A** comme point **objet réel** et envisageons les différents cas possibles pour le faisceau émergent (se propageant après S_2).

1. c'est un faisceau convergent en un point A' , A' est une **image réelle de A** donnée par le système (fig.III.16).

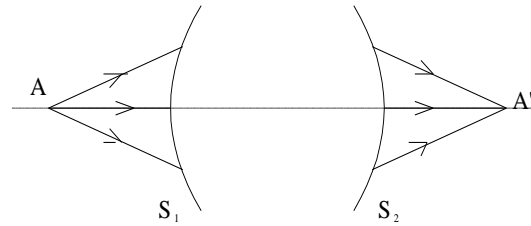


Fig.III.16

2. c'est un faisceau divergent mais dont le prolongement de tous les rayons passe par un même point A'' . **A'' est une image virtuelle de A** (fig.III.17).

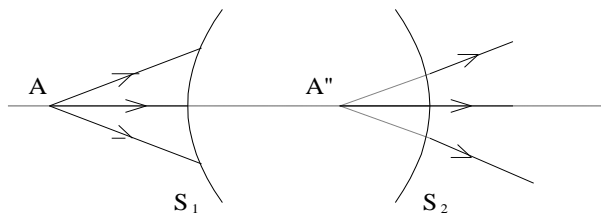


Fig.III.17

3. c'est un faisceau dont les rayons ne passent pas par un même point (ni leur prolongement), ce qui est le cas le plus général.

Dans les cas 1) et 2) on dit que le système est **stigmatique**, dans le cas 3) il est **astigmatique**.

Remarque : Un système **stigmatique** est un système qui donne d'un **point objet** une **image ponctuelle**, le stigmatisme étant défini pour le couple de points image, objet c'est à dire: un système peut donner d'un point A une image ponctuelle A_1 et ne pas donner d'image ponctuelle pour un autre point objet B .

Souvent l'image d'un point n'est pas un point mais une portion d'espace autour d'un point. On dit alors qu'il y a **stigmatisme approché**.

Dans le cas où un faisceau incident convergeant un point A en système S_1S_2 est face d'entrée de ce A est appelé objet (fig.III.18).

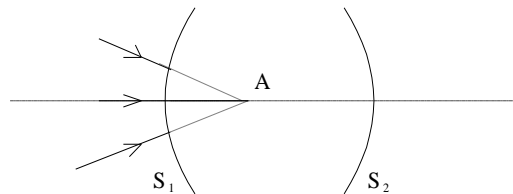


Fig.III.18

un faisceau normalement en absence du système le point virtuel

3. Aplanétisme:

Soit S un système optique centré rigoureusement stigmatique pour un couple de points A, A' de son axe (c'est à dire tout rayon issu de A ressort quelle que soit son inclinaison sur l'axe en passant par A'), S qui est déjà stigmatique pour le couple de points A, A' sera aplanétique pour ce couple de points s'il est encore stigmatique pour tout couple de points B, B' infiniment

voisins de A et A' et situés dans les plans P et P' perpendiculaires à l'axe du système en A et A'.

Il en résulte évidemment qu'un système aplanétique donne d'un petit objet plan perpendiculaire à son axe une image plane perpendiculaire à l'axe (par définition même de l'aplanétisme). Cherchons la condition d'aplanétisme

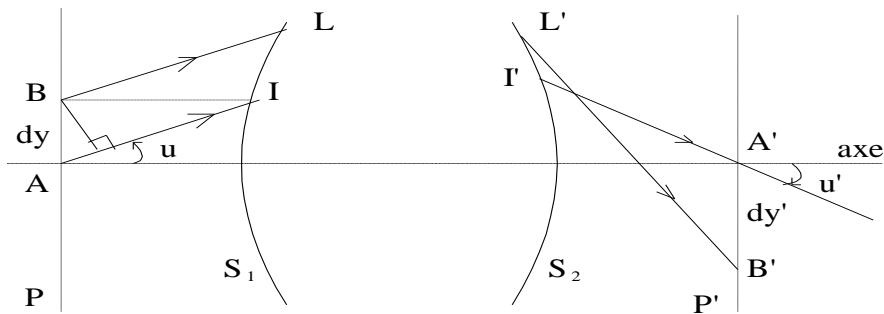


Fig.III.19

Toutes les notations sont définies par la figure III.19, $AB = dy$ est par définition infiniment petit. Il en résulte que $IL, I'L', dy'$ infiniment petits. Choisissons BL parallèle à AI , le système étant stigmatique pour le couple (A, A') , AA' est indépendant de $u = (\vec{AS}_1, \vec{AI})$. De même le système étant stigmatique pour le couple BB' , BB' étant indépendant de u , la différence $(AA') - (BB')$ est donc aussi indépendant de u .

Mais:

$$(AA') = (AI) + (II') + (I'A')$$

$$(BB') = (BL) + (LL') + (L'B') \quad \text{rigoureux}$$

$$(BB') = (BL) + (II') + (I'B') + kdy^2 \quad (\text{principe de Fermat})$$

$$\text{donc: } (AA') - (BB') = (AI - BI) + (A'I' - I'B') - kdy^2$$

k étant une constante dimensionnelle simplement. Soit en appelant N et N' les indices absolus des milieux extrêmes et en posant $u = (\vec{S}_2\vec{A}', \vec{I}'\vec{A}')$ et en remarquons que $AI - BI = dy \cdot \sin u$ et de même $I'B' - I'A' = dy' \cdot \sin u'$

$$(AA') - (BB') = N[AI - BI] + N'[A'I' - I'B'] - kdy^2$$

$$= N \cdot dy \cdot \sin u - N' \cdot dy' \cdot \sin u' = \text{cste indep de } u \text{ à } kdy^2 \text{ près}$$

or si $u = 0$; $u' = 0$ aussi (système centré) donc finalement reste :

$$N \cdot dy \cdot \sin u = N' \cdot dy' \cdot \sin u'$$

qui est la condition d'aplanétisme encore dite condition d'Abbe ou des sinus.

I. DIOPTRE PLAN

xxxxxxxxxxxxxxxx

a. Définition:

Un dioptre est constitué d'une surface de séparation entre deux milieux homogènes, isotropes et transparents d'indices différents. Si la surface de séparation est plane, le dioptre est plan.

b. Formule générale:

Soit P_1 un point objet dans le milieu d'indice N_1 . Considérons deux rayons issus de P_1 : le rayon P_1H tombant sur le DP sous l'incidence normale et qui n'est donc pas dévié et le rayon P_1I tombant sous l'incidence i_1 et qui donne naissance au réfracté IR (angle de réfraction i_2). Le prolongement de ces deux rayons réfractés donne comme intersection le point P_2 , nous avons :

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{N_2}{N_1} = cste$$

$$tgi_1 = \frac{HI}{HP_1}$$

et puisque

$$tgi_2 = \frac{HI}{HP_2}$$

nous avons aussi :

$$\frac{tgi_1}{tgi_2} = \frac{HP_2}{HP_1}$$

et comme $HP_1 = cste$; HP_2 ne peut pas être constant, donc tous les rayons réfractés tels que IR ne semblent pas tous provenir du point P_2 et le dioptre plan n'est pas stigmatique. Dans le cas où i_1 est petit, i_2 l'est également, on peut confondre les sinus et les tangentes et alors on a sensiblement :

$$\frac{HP_2}{HP_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{tgi_1}{tgi_2} = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{N_2}{N_1} = cste \quad \text{d'où :} \quad p_2 = p_1 \frac{N_2}{N_1} = cste$$

Le dioptre plan est approximativement stigmatique pour des faisceaux étroits voisins de l'incidence normale. La forme précédente s'écrit sous une forme plus symétrique:

$$\frac{p_1}{N_1} - \frac{p_2}{N_2} = 0$$

le relèvement apparent est : $P_1P_2 = p_1 - p_2 = p_1 \left(1 - \frac{N_2}{N_1} \right)$

Remarque: Le dioptre plan est rigoureusement stigmatique lorsque $p_1 = 0$; alors $p_2 = 0$ ou lorsque p_1 est infini, alors p_2 est infini.

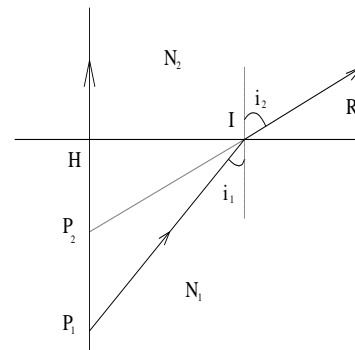


Fig.III.20

II. LAME A FACES PARALLELES



a. Définition:

La lame à faces parallèles est un milieu transparent homogène limité par 2 surfaces planes parallèles. (autrement dit, un ensemble de deux dioptries successifs parallèles) (fig.III.21).

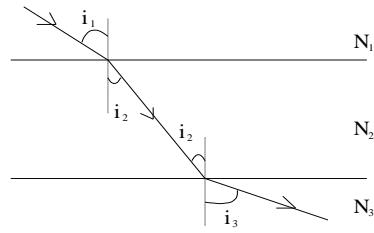


Fig.III.21

$$N_1 \sin i_1 = N_2 \sin i_2 = N_3 \sin i_3$$

si $N_1 = N_3$ (milieux extrêmes identiques) alors; $i_1 = i_3$, le rayon émergent est parallèle au rayon incident.

b. Calcul du déplacement latéral:

On suppose que $N_1 = N_3$ et les notations sont définies par la figure ci-dessous.

$$I_1 I_2 = \frac{l}{\cos i_2}$$

$$I_1 \hat{I}_2 H = (i_1 - i_2) \text{ et } I_1 H = I_1 I_2 \cdot \sin I_1 \hat{I}_2 H$$

d'où:

$$d = \frac{l \cdot \sin(i_1 - i_2)}{\cos i_2}$$

si $i_1 = 0$; $i_2 = 0$ et $d = 0$ (résultat évident a priori : le rayon tombant sous l'incidence normale n'est pas dévié).

$$\text{si } i_1 = \frac{\pi}{2} \quad d = \frac{l \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_2\right)}{\cos i_2} = l$$

d augmente avec i_1 et est maximum pour $i_1 = \frac{\pi}{2}$; le maximum est égal à l'épaisseur de la lame.

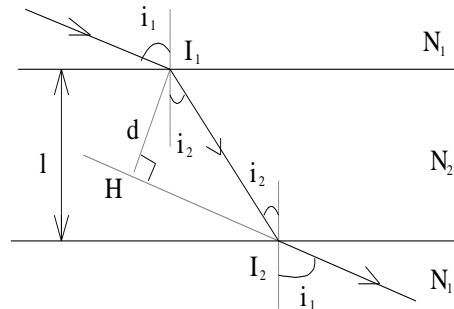


Fig.III.22

c. Image d'un point:

Comme pour le dioptre plan, il n'y a stigmatisme rigoureux que pour un point objet à l'infini. Il y a stigmatisme approché pour des rayons centraux. Nous nous plaçons dans cette hypothèse et appliquerons à chacun des 2 DP qui

constituent la lame à faces parallèles la formule approchée $\frac{p_1}{N_1} - \frac{p_2}{N_2} = 0$, en

faisant bien attention à la signification des différents symboles de cette formule.

L'objet p_1 donne avec le dioptre D_1 une image P_2 et l'on a:

$$\overline{H_1 P_2} = \overline{H_1 P_1} \frac{N_2}{N_1}$$

Cette image P₂ (fig.III.23) joue pour D₂ le rôle d'un objet (virtuel) situé dans un milieu d'indice N₂. L'objet virtuel P₂ donne à travers D₂ une image P' telle que:

$$\overline{H_2 P'} = \overline{H_2 P_2} \frac{N_1}{N_2}$$

développons cette relation :

$$\overline{H_2 H_1} + \overline{H_1 P'} = \overline{H_2 H_1} \frac{N_1}{N_2} + \overline{H_1 P_2} \frac{N_1}{N_2}$$

soit encore :

$$\overline{P_1 H_1} + \overline{H_1 P'} = \overline{H_2 H_1} \frac{N_1}{N_2} - \overline{H_2 H_1}$$

et puisque $\overline{H_2 H_1} = -l$

$$\overline{P_1 P'} = l \left(1 - \frac{N_1}{N_2} \right)$$

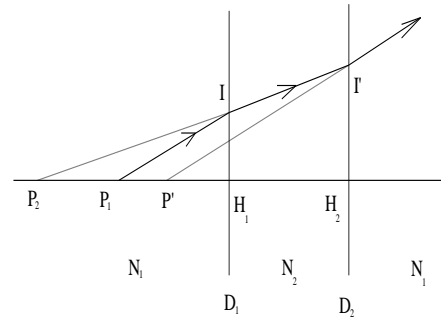


Fig.III.23

qui définit la position de l'image par rapport à celle de l'objet.

Équivalence de la lame à faces parallèles avec un seul dioptré plan:

$$AP' = \text{proj}_{AX} AP = \text{proj}_{AX} II' = l$$

puisque la figure APII (fig.III.24) est un parallélogramme ayant ses côtés 2 à 2 parallèles, pour un objet A fixe, P' est fixe; P est donc dans un plan fixe et on peut remplacer la lame à faces parallèles par le dioptré plan pour le point A.

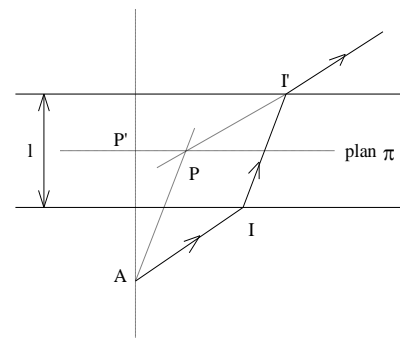
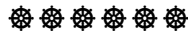


Fig.III.24

Remarque: puisque la lame à face parallèles est équivalente à un dioptré plan, il n'y a rien d'étonnant que la condition de stigmatisme approchée soit la même que pour le dioptré plan.

III. PRISME



a. Définition:

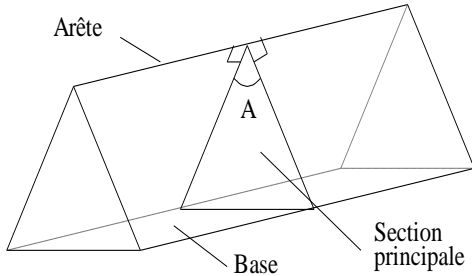


Fig.III.25

Le prisme est un ensemble de deux dioptries plan non parallèles (fig.III.25). L'angle du prisme est l'angle A du dièdre formé par les plans des deux DP, son arête est l'intersection des deux plans, sa base est la face opposée à l'arête, le plan de section principale du prisme est le plan perpendiculaire à l'arête. Nous faisons notre étude dans les conditions suivantes :

- ☆ Tous les rayons sont dans un plan de section principale
- ☆ l'indice du prisme par rapport aux deux milieux extrêmes (supposés identiques) est $n > 1$.
- ☆ On travaille avec une lumière monochromatique (une seule couleur).

b. Formules du prisme:

Dans le triangle BII' , l'angle extérieur : $\hat{x}Bx' = A = r + r'$ (1)

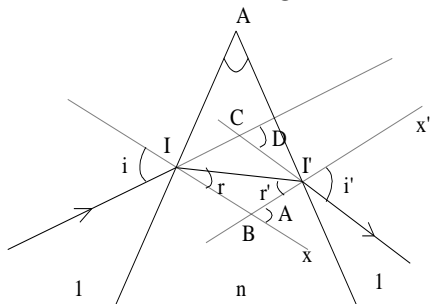


Fig.III.26

Le triangle CII' permet de déterminer la déviation (angle entre le rayon émergent et l'incident)(fig.III.26).

$$D = \hat{CII}' + \hat{C}'I = (\hat{CIB} - I'IB) + (\hat{C}'I'B - \hat{I}'IB)$$

$$= i - r + i' - r'$$

$$\Rightarrow D = i + i' - A \quad (2)$$

En utilisant la loi de Descartes pour l'angle incident : $\sin i = n \sin r$ (3)
puis en utilisant la même loi pour l'angle émergent :

$$\sin r' = \frac{1}{n} \sin i' \Rightarrow \sin i' = n \sin r' \quad (4)$$

Les 4 formules citées sont les formules fondamentales du prisme. Elles viennent d'être établies dans un cas particulier de figure. On peut vérifier qu'elles sont générales en prenant les conventions de signes suivantes.

Pour $n > 1$

A et D sont toujours positifs, les angles i et r sont toujours de même signe et i' et r' sont aussi de même signes, les signes de i et de i' sont indiqués sur la figure (III.27).

Pour $n < 1$, on aura exactement les mêmes conventions, mais avec D

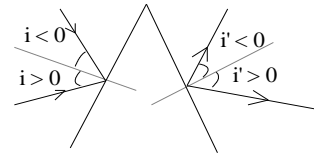


Fig.III.27

Cas des petits angles: Si i et i' sont très petits (ce qui exige A petit), on a sensiblement:

$$i = n.r; i' = n.r' \text{ et en remplaçant}$$

dans A , il vient :

$$\begin{aligned} D &= i + i' - A \\ &= n.r + n.r' - A \\ &= n(r + r') - A = (n - 1)A \end{aligned}$$

La déviation est alors constante, indépendante de l'angle d'incidence.

c. Condition d'émergence:

$n > 1$ à l'entrée du prisme, $\sin i = n \sin r$ donne $\sin r < 1$ et l'incident pénètre toujours dans le prisme. A la sortie, $n \sin r' = \sin i'$. Il est nécessaire pour que $\sin i'$ soit inférieur à 1 que $\sin r' < \frac{1}{n}$. Appelons λ l'angle tel que $\sin \lambda = \frac{1}{n}$, si $r' \leq \lambda$ le rayon émerge; si $r' \geq \lambda$, il y a réflexion totale sur la face de sortie et le rayon reste dans le prisme. Comme r' ne peut pas être mesuré (à l'intérieur du prisme), nous allons donner la condition d'émergence en fonction de la valeur de i .

$$r' = A - r \leq \lambda \Rightarrow r \geq A - \lambda$$

Pour des angles aigus:

$$\begin{aligned} \sin r &\geq \sin(A - \lambda) \\ \frac{\sin i}{n} &\geq \sin(A - \lambda) \end{aligned}$$

finalement: $\sin \lambda = \frac{1}{n}$, on voit tout de suite que si

$A > 2.\lambda$; $A - \lambda > \lambda$ et $\sin(A - \lambda) > \frac{1}{n}$; donc

$\sin i > 1$ ce qui est impossible. Cela signifie que pour un prisme d'angle $A > 2.\lambda$, aucun émergent n'existe. Si $A = 2.\lambda$ une seule solution;

$\sin i = n.\frac{1}{n} = 1$ d'où $i = i' = \frac{\pi}{2}$ (fig.III.28).

Si $A < 2.\lambda$ des émergents peuvent exister et ils correspondent à:

$$i_1 \leq i \leq 90^\circ$$

avec i_1 solution de $\sin i_1 = n \sin(A - \lambda)$

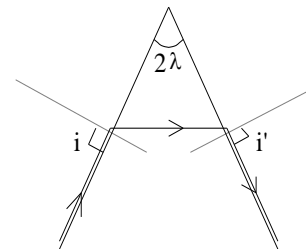


Fig.III.28

d. Etude de la déviation :

$D = i + i' - A$, pour i donné, i' est déterminé par la valeur de n , en définitive, D est fonction de $A, n, i : D = f(A, n, i)$. Nous allons étudier comment D varie en fonction de chacune de ces trois variables considérée séparément.

1. Variation de D avec A, ($i = \text{cste}, n = \text{cste}$)

$D = i + i' - A$ différencions cette expression :

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dA} &= \frac{di'}{dA} - 1 \\ \text{avec: } \sin i' &= n \sin r' \\ \cos i' \cdot \frac{di'}{dA} &= n \cos r' \frac{dr'}{dA} \\ A &= r + r' \\ 1 &= \frac{dr}{dA} + \frac{dr'}{dA} \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre est nul car $i = cste \Rightarrow r = cste$

donc :
$$\frac{di'}{dA} = \frac{n \cos r'}{\cos i'}$$

d'où :

$$\frac{dD}{dA} = n \frac{\cos r'}{\cos i'} - 1$$

si $n > 1$; $i' > r'$; $\frac{\cos r'}{\cos i'} > 1$ et $\frac{dD}{dA} > 0$

La déviation augmente avec A . On utilise le dispositif expérimental représenté sur figure III.29 pour vérifier ceci. Quand A augmente, on voit la tache lumineuse T se déplacer dans le sens de la flèche et il arrive un moment où elle disparaît par suite de la réflexion totale.

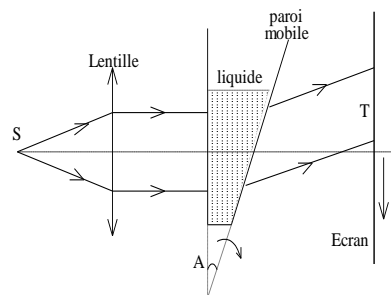


Fig.III.29

2. Variation de D avec n ; ($A = cste$; $i = cste$):

$D = i + i' - A$; différencions par rapport à n :

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dn} &= \frac{di'}{dn} \quad \sin i' = n \sin r' = n \sin(A - r) \\ &= n \sin(\sin A \cdot \cos r - \sin r \cdot \cos A) \end{aligned}$$

mais : $\sin r = \frac{i}{r} \Rightarrow \cos^2 r = 1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}$

d'où:

$$\begin{aligned} \sin i' &= n \left[\sin A \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} - \frac{\sin i}{n} \cdot \cos A \right] \quad [5] \\ &= \sin A \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \sin i \cdot \cos A \end{aligned}$$

différencions:

$$\cos i' \cdot \frac{di'}{dn} = \sin A \cdot \frac{2n}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

ce qui montre $\frac{di'}{dn} = \frac{dD}{dn} > 0$

donc la déviation augmente avec n.

Vérification expérimentale : polyprisme:

conséquence : dispersion de la lumière

En optique physique, on est amené à considérer la lumière comme une onde électromagnétique caractérisée par une fréquence de vibration

$$F = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

ou ce qui revient au même, par une longueur

$$d'onde \lambda = \frac{c}{F}$$

. La longueur d'onde caractérisée par la couleur de la lumière

considérée. Une lumière complexe (exemple la lumière blanche ou lumière solaire est

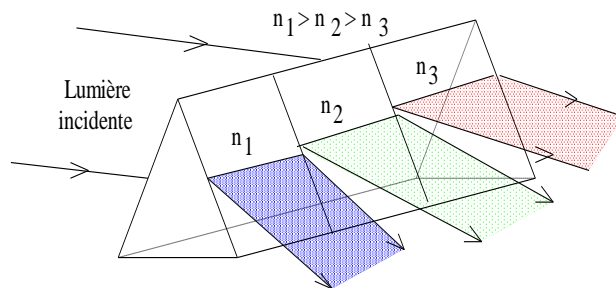


Fig.III.30

en fait la superposition d'une infinité de radiations lumineuses de longueurs d'ondes comprises entre λ_1 et λ_2). Or on montre, toujours dans le cadre de l'optique physique que l'indice d'une substance n'est seulement caractéristique de cette substance mais également de la longueur d'onde de la lumière qui pénètre dans cette substance : $n = f(\lambda)$ c'est ainsi que $n_{rouge} < n_{violet}$ de sorte que si un prisme est éclairé, par un faisceau de lumière complexe, chaque composante de la lumière du faisceau incident n'est pas dévié de la même façon et on reçoit sur un écran une tache faisant apparaître les différentes radiations qui composent le faisceau incident. C'est le phénomène de dispersion. C'est ainsi que l'on explique la formation de l'arc en ciel. Ce phénomène est utilisé dans l'appareil appelé spectroscopie qui utilise (en général) un prisme et qui permet d'analyser une lumière complexe. On peut par ce procédé déterminer les corps entrant dans la composition de certains matériaux et le procédé a été utilisé en astronomie pour déterminer la composition des étoiles.

3. Variation de D avec i (a = cste, n = cste):

$$D = i + i' - A, \quad \frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

repreons la formule repérée par [5] et différencions la:

$$\cos i' \cdot \frac{di'}{di} = n \left[\sin A \frac{-\frac{2 \sin i \cdot \cos i}{n^2}}{2 \sqrt{1 - \sin^2 \frac{i}{n^2}}} - \frac{\cos i}{n} \cdot \cos A \right]$$

d'où l'on tire après simplification :

$$\frac{di'}{di} = -\frac{\cos i \cdot \cos r'}{\cos i' \cdot \cos r}$$

et enfin: $\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i \cdot \cos r'}{\cos i' \cdot \cos r}$
 $\frac{dD}{di} = 0$ pour $\cos i \cdot \cos r' = \cos i' \cdot \cos r$

en élevant au carré, puis remplaçant les \cos^2 par $1 - \sin^2$ et enfin en remplaçant les $\sin^2 r$ par les $\frac{\sin^2 i}{n^2}$ il vient :

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) (\sin^2 i - \sin^2 i') = 0$$

1ère solution: $i = -i' \Rightarrow r = -r' \Rightarrow A = 0$ à rejeter (solution étrangère au problème physique, due à l'élévation au carré).

2ème solution: $i = i' \Rightarrow r = r' \Rightarrow D = D_m = 2 \cdot i_m - A$

comme i varie comme r' } et q uer + $r' = A = cste$; r et r' varient en sens inverse
 comme i' varie comme r

de même que i et i' et il n'arrive donc qu'une seule fois $i = i'$ par ailleurs, $\frac{dD}{di} = 1$

pour

$i = 90^\circ$ donc lorsque i est voisin de 90° D et i varient dans le même sens et puisque au voisinage de 90° , i diminue, D diminue aussi. Ceci montre que D passe par un minimum.

i variant de i_1 tel que $\sin i_1 = n \sin(A - \lambda)$ à 90° , on a la variation de D représentée sur la courbe ci-contre (fig.III.31). Remarquer que $D(i_1) = D(90^\circ) = D_{\max}$ à cause du principe du retour inverse.

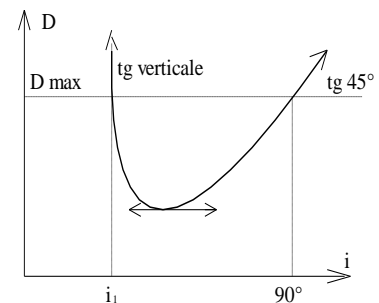


Fig.III.31

Application: au minimum de déviation, on a :

$$D = 2 \cdot i - A \quad \text{et} \quad 2 \cdot r = A \quad \text{d'où l'on tire :}$$

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \frac{A+D}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

on peut ainsi par une simple mesure d'angles (goniomètre) déterminer la valeur de n . On atteint ainsi une précision telle que n est donné avec 5 décimales.

Images données par un prisme:

Le stigmatisme rigoureux se déduit de celui du dioptre plan: pour un point à l'infini et pour un point sur l'arête. Nous admettrons les conditions de stigmatisme approché qui sont les suivantes:

Pour un très proche objet: il émet un pinceau étroit au voisinage de l'arête du prisme, le pinceau moyen est dans le plan de section principale et au voisinage du minimum de déviation. Dans ces conditions l'image est à même de l'arête que l'objet et elle est de nature différente.

Pour un objet fini: la condition de stigmatisme doit être vérifiée pour tous les points de l'objet, ce qui implique entre autres que les dimensions de l'objet soient très petites par rapport à sa distance à l'arête.



☹ *EXERCICES* ☹



I. LOIS DE LA REFRACTION

Exo1:

Un rayon passe de l'air dans le verre, d'indice $n = 1,5$. Calculer l'angle de réfraction r dans le verre pour les incidences $i = 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ$ et 30° . Si on accepte pour r une erreur de $10'$, jusqu'à quelle incidence peut-on se contenter de la formule approchée $i = nr$?

Exo2:

Un verre à l'indice 1,595 pour la lumière rouge et 1,625 pour la lumière violette. Un rayon de lumière blanche, où il y a à la fois de la lumière rouge et de la lumière violette, se propage dans ce verre et arrive sur la surface de séparation avec l'air sous une incidence de 35° . Calculer l'angle que font dans l'air les rayons rouge et violet.

Exo3:

Calculer, pour les lumières rouge et violette, les angles de réfraction limite dans le verre de l'exercice précédent.

Exo4:

Un bloc de verre d'indice 1,59 est plongé dans de l'eau d'indice 1,33. Un rayon lumineux se propage dans l'eau et arrive sur le verre sous une incidence de 70° . Calculer l'angle de réfraction dans le verre.

Exo5:

Calculer, dans les conditions de l'expérience de l'exercice précédent, l'angle limite de réfraction.

Exo6:

Un bloc de verre, d'indice 1,75, a la forme d'un demi-cylindre dont la face plane est horizontale et tournée vers le haut. Au centre O de cette face, on dépose une goutte d'huile de cèdre et on envoie en O , à travers le verre, un faisceau étroit de rayons perpendiculaires à l'axe du cylindre. On constate qu'ils subissent en O la réflexion totale sur la surface de séparation du verre et du liquide lorsque leur incidence dépasse 62° . Quel est l'indice de ce liquide?

Exo7:

Un cube de verre, d'indice 1,5, est posé sur une table; soient A, B, C et D les arêtes verticales. Un rayon horizontal pénètre par la face AB; peut-il sortir par la face BC ? sinon que fait-il ? Calculer sa déviation, c'est à dire l'angle que fait le rayon émergent avec le rayon incident, en fonction de l'angle d'incidence i sur la face AB.

Exo8:

Le rayon horizontal tombe sur la face AB du cube de l'exercice précédent sous une incidence $i = 45^\circ$. Dans quelle région de la face doit se trouver le point d'incidence I pour que le rayon se réfléchisse totalement sur BC, si les arêtes du cubes ont une longueur de 4 cm?

Exo9:

Le cube de verre des exercices précédents est remplacé par une cuve de section horizontal carrée et dont les parois verticales sont en verre très minces; cette cuve est pleine d'eau d'indice 1,33. Déterminer l'angle minimal d'incidence d'un rayon horizontal qui pénètre par la face AB et sort par la face BC.

Exo10:

On se sert d'un bouchon dont le diamètre est de 8 centimètres. Quelle doit être la hauteur maximale de la pointe pour que son extrémité ne puisse être vue par un observateur dont l'oeil est situé au-dessus de la surface de l'eau? indice de l'eau :1,33

Exo11:

Un vase a un fond horizontal de grandes dimensions; ce fond est opaque, sauf en un point O par où pénètre de la lumière, arrivant ainsi de bas en haut dans toutes les directions. Le vase contient une couche de 5 centimètres de sulfure de carbone, d'indice 1,64. Déterminer la région du fond qui est éclairée par les rayons réfléchis totalement par la surface libre.

II. DIOPTRE PLAN

Exo12:

Un faisceau lumineux tombe sous une faible incidence sur l'une des faces d'une cuve parallélépipédique dont les parois minces sont en verre; il vient converger à 12 centimètres de cette face. Qu'arrive-t-il si on remplit la cuve d'eau, d'indice 1,33 ?

Exo13:

Une tige rectiligne est partiellement plongée dans une cuve d'eau; elle fait avec la surface libre un angle α . Montrer que, pour l'oeil d'un observateur situé au dessus de l'eau et regardant presque verticalement, l'image de la partie

immergée est une droite ; calculer l'angle β de cette image avec le plan horizontal.

Exo14:

Sur une même verticale se trouvent : en A, à 1,20 mètres au dessus d'une nappe d'eau, l'oeil d'un observateur; en B, à 0,80 mètre au dessous de la surface libre, l'oeil d'un poisson. Déterminer les positions de B', image de l'oeil du poisson pour l'observateur, et de A', image de l'oeil de l'observateur pour le poisson. Que peut-on dire des distances AB' et BA' ? Indice de l'eau = $4/3$

Exo15:

Une cuve contient une couche d'eau (épaisseur 25 centimètres, indice 1,33) et une couche de benzène (épaisseur 10 cm, indice 1,48). Un observateur, dont l'oeil est à 15 centimètres au dessus de la surface libre du benzène, regarde presque verticalement. A quel distance lui paraît être le fond du vase ?

III. LAME A FACES PARALLELES

Exo16:

Une chambre, où sont traités les produits radioactifs sortant d'une pile atomique, présente une fenêtre fermée par des glaces au plomb, d'indice 1,6 et d'épaisseur totale 1 mètre. Quel est le rapprochement apparent pour un observateur situé de l'autre côté de cette fenêtre ?

Exo17:

Un objet AB est à la distance $a=10$ cm d'une lame à faces parallèles, d'épaisseur $e = 6$ cm et d'indice $n = 1,5$. Déterminer les images obtenues par réfraction à travers les deux dioptrés successifs.

Exo18:

Avec un microscope de faible grossissement, on vise un objet A tracé sur une plaque. On pose sur cette plaque une lame de verre à faces parallèles et on vise l'image A' de A à travers la lame, puis un point B de la surface de cette lame. Les déplacements du microscope permettent de connaître les distances $AA' = x_1 = 2,5$ mm et $A'B = x_2 = 5$ mm. Calculer l'indice de la lame.

Exo19:

Une lame à faces parallèles, d'épaisseur e et d'indice n , est argentée sur sa deuxième face. A une distance a de la première face se trouve un petit objet plan AB.

a- Déterminer les images successives de cet objet et donner la position et la grandeur de l'image définitive A'B'.

Application numérique : $a = 20 \text{ cm}$; $e = 3 \text{ cm}$; $n = 1,5$.

b- Montrer que, quel que soit a , l'image est symétrique de l'objet par rapport à un plan qu'on déterminera.

On ne considère que les rayons tombant sur la lame sous une faible incidence.



☺ **SOLUTIONS** ☺
 ☺☺☺☺☺☺☺

Exo1:

i	10°	15°	20°	25°	30°
r	6°39'	9°56'	13°11'	16°22'	19°29'

La formule $i = nr$ convient jusqu'à $i = 20^\circ$; mais si on exigeait une erreur inférieure à 1', i ne devrait pas dépasser 10'

Exo2:

2°30'

Exo3:

38°50' et 38°

Exo4:

$1,33 \sin 70^\circ = 1,59 \sin r$; $r = 52^\circ$

Exo5:

$1,33 = 1,59 \sin i$; $i = 55^\circ 40'$

Exo6:

1,55

Exo7:

Non, il se réfléchit totalement sur BC et sort par CD; déviation $2i$

Exo8:

Il doit être à moins de 2,1 cm de l'arête B

Exo9:

61°

Exo10:

$h = d / 2 \operatorname{tg} i = 3,5 \text{ cm}$

Exo11:

Tout le fond à l'exception d'un cercle de centre O et de rayon 7,7 cm

Exo12:

Le faisceau vient converger à 16 cm de la face d'entrée.

Exo13:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{n} \operatorname{tg} \alpha; \beta = 37^\circ$$

Exo14:

B' est à 0,6 m au dessous de la surface libre; A'B' = 18 m. A' est à 1,6m au dessus de cette surface, BA' = 2,4 m. Le rapport BA'/AB' est égale à l'indice de l'eau.

Exo15:

A 40,5 cm (au lieu de 50 cm)

Exo16:

37,5 cm

Exo17:

Le premier dioptre, que le rayon issu de A normalement à la lame rencontre en I, donne de A une image virtuelle A₁ telle que IA₁ = na = 15 cm. A₁ joue le rôle d'objet réel pour le second dioptre, que le même rayon rencontre en J (IJ = e).

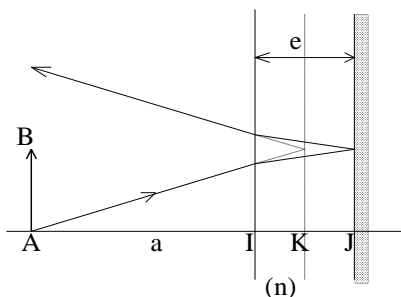
l'image A' est virtuelle et telle que $JA' = \frac{JA_1}{n} = \frac{na + e}{n} = 14cm$. Par ailleurs, les images A₁B₁ et A'B' sont égales à l'objet AB. On retrouve le rapprochement apparent $AA' = e \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2cm$.

Exo18:

$$n = \frac{x_1 + x_2}{x_2} = 1,5$$

Exo19:

On oriente dans le sens de la lumière incidente la normale AIJ abaissée de A



a- A₁ image virtuelle dans le premier dioptre :

$$IA_1 = -na$$

A₂, image virtuelle de A₁, dans le miroir :

$$JA_2 = na + e$$

A' image virtuelle de A₂ dans le dioptre:

$$IA' = a + 2\frac{e}{n} = 24cm$$

Toutes les images ont la même grandeur que l'objet AB.

b- A'B' est symétrique de AB par rapport au plan parallèle aux faces de la lame et passant par K tel que IK = e/n. Le système équivaut à un miroir plan, image de la face réfléchissante dans le dioptre formé par l'autre face.

