

Cours Biomathématiques-Biostatistiques
1^{ère} année Pharmacie

M. Hamamda

20 mai 2017

-
- *La biomathématique* sous-entend l'association de deux sciences : la biologie et les mathématiques. De façon précise les biomathématiques sont constituées par l'ensemble des méthodes et techniques mathématiques, numériques et informatiques qui permettent d'étudier et de modéliser les phénomènes et processus biologiques.

 - *Les biomathématiques* ont des débouchés tant pratiques que théoriques dans de nombreux domaines comme la biologie des populations, la physiologie, la génomique, la pharmacologie etc.

 - *Un modèle* est un système d'équations mathématiques rendant compte de toutes les données expérimentales connues du phénomène biologique étudié.

TABLE DES MATIÈRES

I	Biomathématiques	2
1	Chapitre 1 : Fonction réelle d'une variable réelle	3
1.1	Notion de fonction	3
1.1.1	Parité et périodicité	4
1.1.2	Fonction monotone	6
1.1.3	Bijection et fonction réciproque	6
1.2	Limites	7
1.2.1	Limite en un point	7
1.2.2	Limite en l'infini	8
1.2.3	Opérations sur les limites	8
1.3	Fonctions continues	9
1.3.1	Continuité en un point	9
1.3.2	Opérations sur les fonctions continues	10
1.4	Fonctions dérivables	10
1.4.1	Dérivée d'une fonction	10
1.4.2	Dérivée à droite et à gauche	11
1.4.3	Opérations sur les fonctions dérivables	12
1.4.4	Dérivée de fonctions usuelles	12
1.4.5	Composition	12

1.4.6	Dérivées successives	13
1.4.7	Formule de Leibniz	14
1.4.8	Règle de l'hospital	14
1.5	Fonctions usuelles	15
1.5.1	Fonction logarithme	15
1.5.2	Fonction exponentielle	16
1.5.3	La fonction puissance	17
1.5.4	Fonctions trigonométriques	17
1.5.5	Fonctions trigonométriques réciproques	18
1.6	Etude de la fonction $y=f(x)$	19
1.6.1	Domaine de définition	19
1.6.2	Réduction du domaine d'étude de la fonction	19
1.6.3	Continuité	19
1.6.4	Etude aux bornes	19
1.6.5	Calcul de f'	20
1.6.6	Calcul de f''	20
1.6.7	Tableau de variations	20
1.6.8	Tracé et informations complémentaires	20
2	Chapitre 2 : Calcul intégral et équations différentielles	21
2.1	Calcul intégral et primitives	21
2.1.1	Propriétés de l'intégrale	21
2.1.2	Primitive d'une fonction	23
2.1.3	Primitives des fonctions usuelles	23
2.1.4	Intégrale définies	24
2.1.5	Méthodes d'intégration	25
2.1.6	Intégrale généralisées	31
2.2	Equations différentielles	32
2.2.1	Introduction (Equation de Malthus)	32
2.2.2	Equation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre	34

2.2.3	Equation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre	35
2.2.4	Exemples d'autres équations différentielles (non linéaires)	37
2.2.5	Equations différentielles du second ordre	42
3	Chapitre 3 : Fonctions à plusieurs variables	49
3.1	Définition d'une fonction à plusieurs variables	49
3.2	Continuité	51
3.3	Dérivées partielles	51
3.3.1	Dérivées partielles du premier ordre	51
3.3.2	Dérivées partielles d'ordre supérieur	52
3.3.3	Extrema d'une fonction à deux variables	53
3.4	Différentielles	55
3.5	Calcul d'erreur	55
3.5.1	Erreur absolu	55
3.5.2	Erreur relative et différentielle logarithmique	56
3.6	Méthode des moindres carrés	57
4	Chapitre 4 : Méthodes numériques	60
4.1	La courbe expérimentale et l'interpolation graphique	60
4.2	Calcul approché de dérivées	61
4.3	Interpolations	63
4.3.1	Interpolation linéaire	63
4.3.2	Interpolation parabolique	63
4.4	Calcul approché de l'intégrale	64
4.4.1	Méthode des rectangles pour deux points	64
4.4.2	Méthode des rectangles pour (n+1) points régulièrement répartis	64
4.4.3	Méthode des trapèzes pour deux points	65
4.4.4	Méthode des trapèzes pour (n+1) points régulièrement répartis	67
4.4.5	Méthode de Simpson pour trois points régulièrement répartis	67

4.4.6	Méthode de Simpson pour $(n+1)$ points régulièrement répartis, n pair	67
4.5	Résolution d'équations : Méthode de Newton-Raphson	68
II	Probabilités	70
5	Théorie des probabilités	72
5.1	Analyse combinatoire	72
5.1.1	Notion de factorielle	72
5.1.2	Permutation	72
5.1.3	Arrangements	73
5.1.4	Combinaisons	73
5.1.5	Propriétés des C_n^p	73
5.1.6	Triangle de Pascal	73
5.1.7	Formule du Binôme	74
5.2	Notion de probabilité	74
5.2.1	Expériences aléatoires	74
5.2.2	Événements	75
5.2.3	Probabilité	78
5.3	Probabilités totales	78
5.4	Probabilités conditionnelles	79
5.4.1	Théorème des probabilités composées	81
5.4.2	Événements indépendants	81
5.4.3	Tirage avec ou sans remise	81
5.4.4	Applications	83
5.4.5	Arbre probabiliste	85
5.5	Théorème de Bayes ou théorème de la probabilité des causes	87
5.5.1	Cas de deux causes	88
5.5.2	Généralisation à plusieurs causes	88
6	Variables aléatoires discrètes	90
6.1	Définition d'une variable discrète	90

6.2	Loi de probabilité	91
6.3	Fonction de répartition	92
6.4	Paramètres caractéristiques	93
6.4.1	Espérance mathématique	93
6.4.2	Moments	93
6.4.3	Variance	94
6.4.4	Écart-type	95
6.4.5	Mode ou valeur modale	95
6.5	Variable centrée réduite	95
6.6	Principales lois de variables discrètes	96
6.6.1	Loi de Bernoulli	96
6.6.2	Loi binomiale	97
6.6.3	Loi de poisson	98
6.6.4	Loi hypergéométrique	98
7	Variables aléatoires continues	100
7.1	Définition d'une variable aléatoire continue	100
7.2	Fonction de répartition	101
7.3	Fonction densité de probabilité	101
7.4	Paramètres caractéristiques d'une variable aléatoire continue	103
7.4.1	Espérance	103
7.4.2	Variable aléatoire continue centrée	103
7.4.3	Moments	103
7.4.4	Variance et écart-type	103
7.4.5	Variable aléatoire continue centrée réduite	104
7.4.6	Médiane et mode	104
7.5	Principales loi de variables aléatoires continues	105
7.5.1	Loi uniforme	105
7.5.2	Loi normale (loi de Laplace-Gauss)	106
7.5.3	Loi normale centrée réduite	107
7.5.4	loi log normale	107
7.6	Approximations des lois	108

7.6.1	Approximation de la loi binomiale par une loi normale	. 108
7.6.2	Approximation de la loi de Poisson par une loi normale	108

Première partie

Biomathématiques

CHAPITRE 1

Chapitre 1 : Fonction réelle d'une variable réelle

1.1 Notion de fonction

Définition 1.1.1 Soit E une partie non vide de \mathbb{R} ($\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$), où \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réelles. On appelle **fonction** d'une variable réelle à valeurs réelles toute application

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x). \end{aligned}$$

On appelle E le domaine de définition de la fonction f .

Exemple 1.1.1 La fonction inverse $f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \rightarrow \frac{1}{x}$

Définition 1.1.2 Le **graphe** d'une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de \mathbb{R}^2 définie par $\Gamma_f = \{(x, f(x)) / x \in E\}$. FIG 1.1.

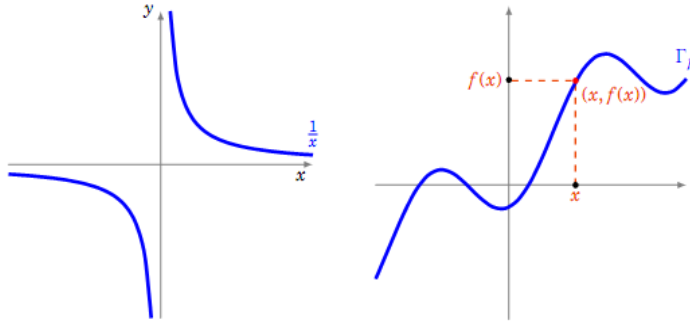


FIG. 1.1 – Le graphe d'une fonction

1.1.1 Parité et périodicité

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (I est symétrique par rapport à l'origine 0)

Définition 1.1.3 – La fonction f est dite **paire** si $f(-x) = f(x), \forall x \in I$. Graphiquement, f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- La fonction f est dite **impaire** si $f(-x) = -f(x), \forall x \in I$. Graphiquement, f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.
- La fonction f est dite **périodique** s'il existe $T > 0$ tel que $f(x + T) = f(x)$. Graphiquement, f est périodique de période T si et seulement si son graphe est invariant par la translation de vecteur $T \vec{i}$, où \vec{i} est le premier vecteur de coordonnées.

Exemple 1.1.2 – Les fonctions $x \rightarrow x^2, x \rightarrow \cos(x)$ sont paires. FIG 1.2.

- Les fonctions $x \rightarrow x^3, x \rightarrow \tan(x)$ sont impaires. FIG 1.2.
- Les fonctions sinus cosinus sont 2π -périodiques. FIG 1.3.

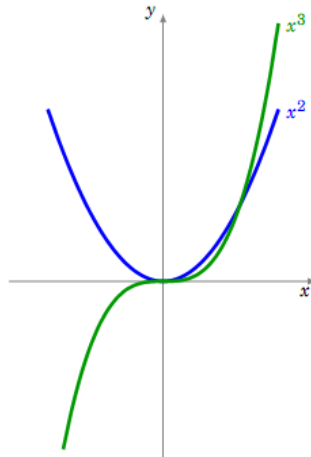


FIG. 1.2 – Le graphe de x^2 et x^3

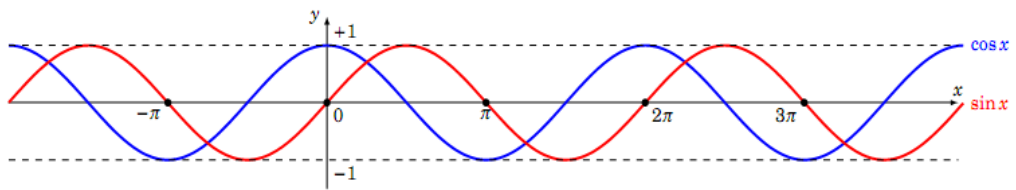


FIG. 1.3 – Le graphe de cosinus et sinus

1.1.2 Fonction monotone

Soit $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.1.4 – f est dite **croissante** (resp. **strictement croissante**) sur E si :

$$\forall (x, y) \in E^2 : x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

$$\text{(resp. } \forall (x, y) \in E^2 : x < y \implies f(x) < f(y)\text{)}.$$

– f est dite **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) sur E si :

$$\forall (x, y) \in E^2 : x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

$$\text{(resp. } \forall (x, y) \in E^2 : x < y \implies f(x) > f(y)\text{)}.$$

– f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur E si elle est **croissante** ou **décroissante** (resp. **strictement croissante** ou **strictement décroissante**).

1.1.3 Bijection et fonction réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction, où E et F sont deux parties de \mathbb{R} .

Définition 1.1.5 – f est **injective** si $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \implies x = x'$.

– f est **surjective** si $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$.

– f est **bijjective** si elle est à la fois injective et surjective, c-à-d : $\forall y \in F, \exists ! x \in E : y = f(x)$.

Propriétés 1.1.1 Si $f : E \rightarrow F$ est une fonction **bijjective** alors il existe une unique application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. La fonction g est la **bijection réciproque** de f notée f^{-1} .

1.2 Limites

1.2.1 Limite en un point

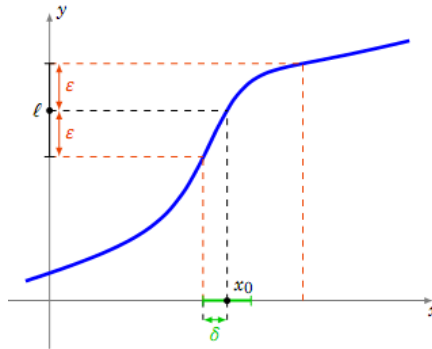
Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de E .

Définition 1.2.1 Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour **limite** l en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E : |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On dit aussi que f **tend vers** l lorsque x tend vers x_0 . On note alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ ou bien } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l.$$



Définition 1.2.2 – On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

– On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

1.2.2 Limite en l'infini

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$

Définition 1.2.3 Soit $l \in \mathbb{R}$.

– On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I : x > B \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

on note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

– On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I : x > B \implies f(x) > A$$

on note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

1.2.3 Opérations sur les limites

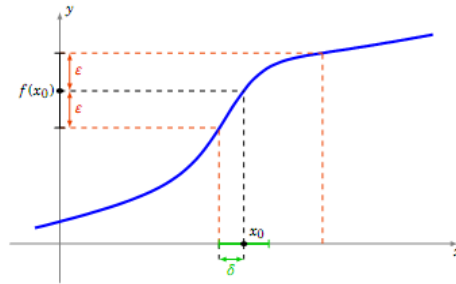
Propriétés 1.2.1 Soit $f, g : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x) = \lambda l_1$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = l_1.l_2$.
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

Remarque 1.2.1 Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g = -\infty$ alors on ne peut a priori rien dire sur la limite de f et g (cela dépend vraiment de f et de g). On raccourci cela en $+\infty - \infty$ est une forme indéterminée. Voici une liste de **formes indéterminées** : $+\infty - \infty$, $0.\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞ et ∞^0 .

Exemple 1.2.1

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \frac{0}{0} (F.I)$$



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{(x - a)(x^2 + ax + a^2)} = \frac{2}{3a}.$$

1.3 Fonctions continues

1.3.1 Continuité en un point

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1.3.1 1. On dit que f est **continue en un point** $x_0 \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. On dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I .

3. Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est-à-dire si elle n'a pas de saut

Exemple 1.3.1 1. Les fonctions suivantes sont continues :

2. Une fonction constante sur un intervalle.

3. La fonction racine carrée $x \rightarrow \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.
4. Les fonction $\sin x$ et $\cos x$ sur \mathbb{R} .
5. La fonction valeur absolue $x \rightarrow |x|$ sur \mathbb{R} .
6. La fonction $\exp x$ sur \mathbb{R} .
7. La fonction $\ln x$ sur $]0, +\infty[$.

1.3.2 Opérations sur les fonctions continues

Propriétés 1.3.1 Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors :

1. $\lambda.f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).
2. $f + g$ est continue en x_0 .
3. $f \times g$ est continue en x_0 .
4. Si $f \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0 .

1.4 Fonctions dérivables

1.4.1 Dérivée d'une fonction

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$

Définition 1.4.1 1. f est **dérivable** en x_0 si le **taux d'accroissement** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0 . La limite s'appelle alors le **nombre dérivée** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2. f est **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point x_0 de I . La fonction $x \rightarrow f'(x)$ est la fonction dérivée de f , elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Exemple 1.4.1 La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point x_0 de \mathbb{R} . En effet :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\ &= x + x_0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0.$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$, autrement dit : $f'(x) = 2x$.

Propriétés 1.4.1 Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Remarque 1.4.1 1. Si f est **dérivable en** x_0 , alors elle est **continue en** x_0 .

2. Si f est **dérivable sur** I , alors elle est **continue sur** I .

Remarque 1.4.2 La **réciproque est fausse** : par exemple, la fonction valeur absolue $x \rightarrow |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

1.4.2 Dérivée à droite et à gauche

Définition 1.4.2 1. Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie, on dit que f est dérivable à droite de x_0 . On note alors **la dérivée à droite** par $f'_d(x_0)$.

2. Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie, on dit que f est dérivable à gauche de x_0 . On note alors **la dérivée à gauche** par $f'_g(x_0)$.

3. f est dérivable $\implies f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

1.4.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriétés 1.4.2 Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I . Alors pour tout $x \in I$:

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé,
3. $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
4. $(\frac{1}{f})'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ si $f(x) \neq 0$,
5. $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ si $g(x) \neq 0$.

Ou d'une manière plus facile à mémoriser

$$(f+g)' = f'+g', (\lambda f)' = \lambda f', (f \times g)' = f'g + fg', \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}, \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

1.4.4 Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable. Le tableau de droite est celui des compositions, u est une fonction $x \rightarrow u(x)$.

1.4.5 Composition

Propriétés 1.4.3 Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x de dérivée :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Corollaire 1.4.1 Soit I un intervalle ouvert, Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \rightarrow I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$	u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$	\sqrt{u}	$\frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x	e^u	$u' e^u$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

FIG. 1.4 – Dérivée des fonctions usuelles

1.4.6 Dérivées successives

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction f' est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f . Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f''', f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

Si la dérivée $n^{\text{ième}}$ notée $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.

Exemple 1.4.2 Soit $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$. La fonction f est définie,

continue et dérivable sur \mathbb{R} . Alors

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= 4x^3 - 9x^2 + 2, \\ f^{(2)}(x) &= 12x^2 - 18x, \\ f^{(3)}(x) &= 24x - 18, \\ f^{(4)}(x) &= 24, \\ f^{(n)}(x) &= 0, \forall n \geq 5. \end{aligned}$$

1.4.7 Formule de Leibniz

$$(f.g)^{(n)} = f^{(n)}.g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}.g^{(1)} + \dots + \binom{n}{k} f^{(n-k)}.g^{(k)} + \dots + f.g^{(n)}$$

autrement dit :

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}.g^{(k)}.$$

Exemple 1.4.3 1. Pour $n = 1$, $(f.g)^{(1)} = f'.g + f.g'$.

2. Pour $n = 2$, $(f.g)^{(2)} = f''g + 2f'.g' + f.g''$.

1.4.8 Règle de l'hospital

Théorème 1.4.1 Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$.

On suppose que :

1. $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
2. $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, g'(x) \neq 0$.

Si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exemple 1.4.4 Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)} = \frac{0}{0}$

2. $f(x) = \ln(x^2 + x - 1), f(1) = 0, f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$

3. $g(x) = \ln(x), g(1) = 0, g'(x) = \frac{1}{x}$

Prenons $I =]0, 1]$, $x_0 = 1$, alors g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{1\}$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \underset{x \rightarrow 1}{\rightarrow} 3 \quad \text{alors} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow 1}{\rightarrow} 3.$$

1.5 Fonctions usuelles

1.5.1 Fonction logarithme

Propriétés 1.5.1 Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

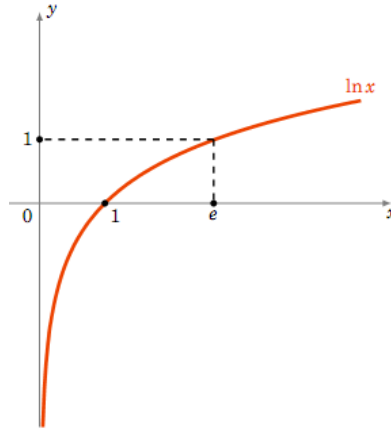
$$\ln' x = \frac{1}{x}, \forall x \in]0, +\infty[\quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$) :

1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$,
3. $\ln(a^n) = n \ln a$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
4. \ln est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} ,
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
6. La fonction \ln est concave et $\ln x \leq x + 1$ (pour tout $x > 0$).

Remarque 1.5.1 $\ln x$ s'appelle le logarithme naturel ou aussi logarithme népérien. Il est caractérisé par $\ln e = 1$. On définit le logarithme en base a par

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$



de sorte que

$$\log_a(a) = 1.$$

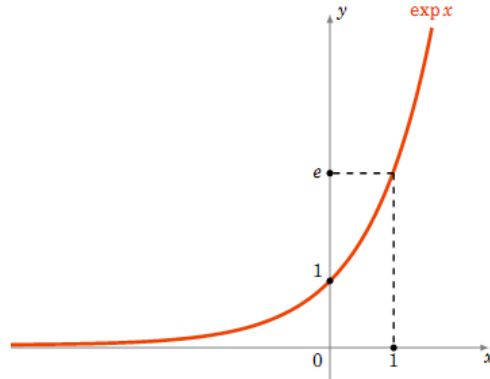
Pour $a = 10$ on obtient le logarithme décimal \log_{10} qui vérifie $\log_{10}(10) = 1$ (et donc $\log_{10}(10^n) = n$). Dans la pratique on utilise l'équivalence : $x = 10^y \iff y = \log_{10}(x)$.

1.5.2 Fonction exponentielle

Définition 1.5.1 La bijection réciproque de $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ s'appelle la fonction exponentielle, notée $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$.

Propriétés 1.5.2 La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\exp(\ln x) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
2. $\exp(a + b) = \exp a \times \exp b$,
3. $\exp(nx) = (\exp x)^n$,
4. $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante,
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$,
6. La fonction exponentielle est dérivable et $\exp' x = \exp x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Elle est convexe et $\exp x \geq 1 + x$.



1.5.3 La fonction puissance

Définition 1.5.2 On définit pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$

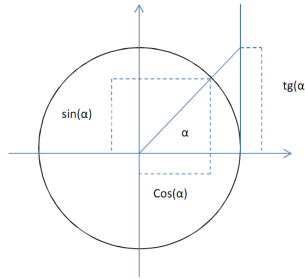
$$a^b = \exp(b \ln a).$$

- Remarque 1.5.2**
1. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2} \ln a)$ (la racine carrée de a),
 2. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n} \ln a)$ (la racine $n^{\text{ième}}$ de a),
 3. On note aussi $\exp x$ par e^x ce qui se justifie par le calcul $e^x = \exp(x \ln e) = \exp x$,
 4. Les fonctions $x \rightarrow a^x$ s'appellent aussi des fonctions exponentielles et se ramènent systématiquement à la fonction exponentielle classique par l'égalité $a^x = \exp(x \ln a)$. Il ne faut surtout pas les confondre avec les fonctions puissances $x \rightarrow x^a$.

1.5.4 Fonctions trigonométriques

Définition 1.5.3 Dans un cercle de rayon $r = 1$, les fonctions sinus, cosinus et tangente sont définies comme le rappelle le schéma

- Propriétés 1.5.3**
1. sin et cos sont de période 2π , tan est de période π .
 2. sin et tan sont impaires, cos est paire.



3. $(\sin)' = \cos, (\cos)' = -\sin$

4. $(\tan)' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

1.5.5 Fonctions trigonométriques réciproques

Définition 1.5.4 Sur des intervalles judicieusement choisis pour qu'elles soient strictement monotones, les fonctions trigonométriques ont alors des fonctions réciproques :

Fonction f	Intervalle de f	fonction f^{-1}	Intervalle de f^{-1}	Dérivée de f^{-1}
$\sin(x)$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos(x)$	$[0, \pi]$	$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\arctan(x)$	$]-\infty, +\infty[$	$\frac{1}{1+x^2}$

Propriétés 1.5.4 On a les propriétés :

- $\sin(\arcsin(x)) = x$ sur $[-1, 1]$
- $\cos(\arccos(x)) = x$ sur $[-1, 1]$
- $\tan(\arctan(x)) = x$ sur $]-\infty, +\infty[$
- $\arcsin(\sin(x)) = x$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\arccos(\cos(x)) = x$ sur $[0, \pi]$
- $\arctan(\tan(x)) = x$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Remarque 1.5.3 $\arcsin(x)$ signifie : "Quel est l'arc dont le sinus est x ?"

Exemple 1.5.1 $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}, \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

1.6 Etude de la fonction $y=f(x)$

1.6.1 Domaine de définition

Donner l'(es) intervalle(s) dans lequel (lesquels) la fonction a un sens.

1.6.2 Réduction du domaine d'étude de la fonction

- f paire \implies travailler sur $0 \leq x$, puis la symétrie par rapport à yy' .
- f impaire \implies travailler sur $0 \leq x$, puis la symétrie par rapport à O .
- f de période $T \implies$ travailler sur une période ($[-T/2, +T/2]$ ou $[0, T]$), puis translation.

1.6.3 Continuité

S'étudie souvent par combinaison (+, -, ., /, o) des fonctions continues.

1.6.4 Etude aux bornes

Bornes finies $x_0 : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

- Si A est fini : on peut éventuellement prolonger la fonction en x_0 (seulement à droite ou à gauche si la limite n'existe qu'à droite ou à gauche).
- Si A est infini : **asymptote verticale** $x = x_0$. L'étude de la limite, suivant que $x \rightarrow x_0^+$ ou $x \rightarrow x_0^-$, renseigne sur l'existence d'une ou de deux branches infinies.

Bornes infinies $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$

- Si A est fini : **asymptote horizontale** $y = A$. La position de la courbe par rapport à cette asymptote peut être trouvée en étudiant le signe de $f(x) - A$.
- Si A est infini : branche infinie, séparer éventuellement les cas $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, puis étudier $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$.
 - Si a infini \implies **branche parabolique** par rapport à yy'

- Si a fini \implies direction asymptotique $y = ax$. Etudier alors $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$
- Si b infini \implies **branche parabolique de direction par rapport à $y = ax$**
- Si b fini \implies **asymptote $y = ax + b$.**

1.6.5 Calcul de f'

- $f' > 0 \implies f \nearrow, f' < 0 \implies f \searrow$
- f' s'annule et change de signe \implies extremum
- $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe en x_0 .

1.6.6 Calcul de f''

- $f'' > 0 \implies$ concavité vers les $y > 0$
- $f'' < 0 \implies$ concavité vers les $y < 0$
- f'' s'annule et change de signe \implies **point d'inflexion** (la courbe traverse sa tangente)

1.6.7 Tableau de variations

Résumer dans un tableau toutes les informations obtenues sur la courbe.

1.6.8 Tracé et informations complémentaires

Souvent les informations recueillies suffisent pour avoir une idée de la forme de la courbe. On peut, pour compléter ou confirmer le tracé, aller chercher les informations supplémentaires suivantes :

- Intersection de la courbe avec les axes
- Intersection de la courbe avec l'(es) éventuelle(s) asymptote(s)
- Calculer quelques points et (ou) quelques pentes de tangente.

CHAPITRE 2

Chapitre 2 : Calcul intégral et équations différentielles

2.1 Calcul intégral et primitives

L'intégrale d'une fonction f continue sur $[a, b]$ mesure l'air de la portion du plan comprise entre la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et les droites $x = a$, $x = b$ et notée $\int_a^b f(x)dx$.

Théorème 2.1.1 *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.*

2.1.1 Propriétés de l'intégrale

Les trois principales propriétés de l'intégrale sont la relation de Chasles, la positivité et la linéarité.

Relation de Chasles

Propriétés 2.1.1 *Soient $a < c < b$. Si f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$. Et on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Remarque 2.1.1 On a :

1. $\int_a^a f(x)dx = 0,$

2. Pour $a < b,$ $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

Positivité de l'intégrale

Propriétés 2.1.2 Soit $a \leq b$ deux réels et f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Si $f \leq g$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

En particulier, si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

Linéarité de l'intégrale

Propriétés 2.1.3 Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.

1. $f + g$ est une fonction intégrable et $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

2. Pour tout réel $\lambda,$ λf est intégrable et on a $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$

Par ces deux premiers points nous avons **la linéarité de l'intégrale** : pour tous réels λ et μ

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

3. $f \times g$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ mais en général $\int_a^b (fg)(x)dx \neq$

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right).$$

4. $|f|$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ et $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

5. Si f est paire et $[-\alpha, \alpha] \subset [a, b]$ alors

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx.$$

6. Si f est impaire alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$.

2.1.2 Primitive d'une fonction

Définition 2.1.1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle quelconque I de \mathbb{R} . On dit que $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Propriétés 2.1.4 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f . Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

2.1.3 Primitives des fonctions usuelles

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \int e^x dx &= e^x + c \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + c \\ \int \cos x dx &= \sin x + c \\ \int \sin x dx &= -\cos x + c \\ \int \frac{dx}{x+a} &= \ln |x+a| + c \\ \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases} \text{ sur }]-1, 1[$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c.$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int u(x)u'(x)dx = \frac{1}{2}u^2(x) + c$$

$$\int u^\alpha(x)u'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(x) + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln |u(x)| + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}dx = \sqrt{u(x)} + c$$

2.1.4 Intégrale définies

Définition 2.1.2 Si f est une fonction continue sur $I([a, b] \subset I)$ et F est une primitive de f sur I , l'**intégrale définie** de f entre les bornes d'intégration a et b est donnée par :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b F'(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple 2.1.1 1. Pour $f(x) = e^x$, une primitive de f est e^x . Donc

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

2. Pour $f(x) = x^2$, une primitive de f est $\frac{x^3}{3}$. Donc

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

3. $\int_a^x \cos t dt = [\sin t]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$ est une primitive de $\cos t$.

2.1.5 Méthodes d'intégration

A\Changement de variable

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $u : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ une fonction de dérivée continue et strictement monotone avec

$$\begin{cases} u(\alpha) = a \\ u(\beta) = b. \end{cases}$$

En effectuant dans l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ le changement de variable $x = u(t)$.

Alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)] u'(t) dt.$$

Exemple 2.1.2 1. Calcul de $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$.

$$\text{On a } \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{a^2}+1} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1},$$

on pose $t = \frac{x}{a}$ alors $x = at$ et $dx = d(at) = a dt$, donc

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{(t)^2+1} = \frac{1}{a} \arctan(t) + c = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

2. Calcul de $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx$.

Soit le changement de variable $u = 1 - x^2$, donc $du = -2x dx$. Pour

$x = 0, u = 1$ et pour $x = 1/2, u = 3/4$, alors

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx = \int_1^{3/4} \frac{\frac{-du}{2}}{(u)^{3/2}} = -\frac{1}{2} \int_1^{3/4} u^{-3/2} du = \left[u^{-1/2} \right]_1^{3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.$$

B \ Intégration par partie

Théorème 2.1.2 Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$.

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Exemple 2.1.3 Pour calculer $\int_0^1 xe^x dx$, on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Nous aurons besoin de savoir que $u'(x) = 1$ et qu'une primitive de $v'(x)$ est e^x . Alors la formule d'intégration par partie donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)dx \\ &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx \\ &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x dx \\ &= (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - [e^x]_0^1 \\ &= e - (e^1 - e^0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exemple 2.1.4 Calcul de $\int_1^e x \ln x dx$.

On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$. Alors

$$\begin{aligned}
 \int_1^e x \ln x dx &= \int_1^e u(x)v'(x)dx \\
 &= [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x)dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= \left(\frac{e^2}{2} \cdot \ln e - \frac{e^1}{2} \ln 1 \right) - \frac{1}{2} \int_1^e x dx \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) \\
 &= \frac{e^2 + 1}{4}.
 \end{aligned}$$

C\ Intégration des fractions rationnelles

On souhaite d'abord intégrer les fractions rationnelles $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$ avec $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Premier cas : Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ s'écrit aussi $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a(x-x_1)(x-x_2)}$ et il existe deux nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$. On a donc

$$\int f(x)dx = A \ln |x - x_1| + B \ln |x - x_2| + cte.$$

Deuxième cas : Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a(x-x_0)^2}$ et il existe deux nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tel que

$f(x) = \frac{A}{(x-x_0)^2} + \frac{B}{(x-x_0)}$ et on a alors

$$\int f(x)dx = -\frac{A}{(x-x_0)} + B \ln|x-x_0|.$$

Troisième cas : Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ ne possède pas de racine réelle. Voyons comment faire sur un exemple.

Exemple 2.1.5 Soit $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1}$. Dans un premier temps on fait apparaître une fraction du type $\frac{u'}{u}$ (que l'on sait intégrer par $\ln|u|$.)

$$f(x) = \frac{(4x+1)\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4} \frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{3}{4} \frac{1}{2x^2+x+1}$$

on peut intégrer la fraction $\frac{4x+1}{2x^2+x+1}$:

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1} dx = \int \frac{u'}{u} dx = \ln|2x^2+x+1| + c.$$

Occupons-nous de l'autre partie $\frac{1}{2x^2+x+1}$, nous allons l'écrire sous la forme $\frac{1}{u^2+1}$ (dont une primitive est $\arctan u$).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x^2+x+1} &= \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} + 1} \\ &= \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8}} \\ &= \frac{8}{7} \frac{1}{\frac{8}{7}2(x+\frac{1}{4})^2 + 1} \\ &= \frac{8}{7} \frac{1}{(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4}))^2 + 1}. \end{aligned}$$

On pose le changement de variable $u = \frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})$ et donc $du = \frac{4}{\sqrt{7}}dx$ pour

trouver

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{2x^2 + x + 1} dx &= \int \frac{8}{7} \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x + \frac{1}{4}\right)\right)^2 + 1} \\
 &= \frac{8}{7} \int \frac{du}{u^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan u + c \\
 &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x + \frac{1}{4}\right)\right) + c.
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int f(x) dx = \frac{1}{4} \ln |2x^2 + x + 1| + \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x + \frac{1}{4}\right)\right) + c.$$

D \setminus Intégration des fractions trigonométriques

On peut aussi calculer les primitives de la forme $\int P(\cos x, \sin x) dx$ ou $\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)} dx$ quand P et Q sont des polynômes, en se ramenant à intégrer une fraction rationnelle. Il existe deux méthodes :

1. les règles de Bioche.
2. le changement de variable $t = \tan x$.

1. Les règles de Bioche On note $\omega(x) = f(x) dx$. On a alors $\omega(-x) = f(-x) d(-x) = -f(-x) dx$ et $\omega(\pi - x) = f(\pi - x) d(\pi - x) = -f(\pi - x) dx$.

- Si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \cos x$
- Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \sin x$
- Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \tan x$.

Exemple 2.1.6 Calcul de la primitive $\int \frac{\cos x dx}{2 - \cos^2 x}$.

On note $\omega(x) = \frac{\cos x dx}{2 - \cos^2 x}$. Comme

$$\begin{aligned}\omega(\pi - x) &= \frac{\cos(\pi - x)d(\pi - x)}{2 - \cos^2(\pi - x)} \\ &= \frac{(-\cos x)(-dx)}{2 - \cos^2 x} \\ &= \omega(x).\end{aligned}$$

Alors le changement de variable qui convient est $u = \sin x$ pour lequel $du = \cos x dx$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x dx}{2 - \cos^2 x} &= \int \frac{\cos x dx}{2 - (1 - \sin^2 x)} \\ &= \int \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \arctan u \\ &= \arctan(\sin x) + c.\end{aligned}$$

2. Le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ Si on pose $t = \tan \frac{x}{2}$, on a

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}, dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Exemple 2.1.7 Calcul de l'intégrale $\int_{-\pi/2}^0 \frac{dx}{1 - \sin x}$.

En posant $t = \tan \frac{x}{2}$, pour $x = -\pi/2$, $t = -1$ et pour $x = 0$, $t = 0$. De plus

on a $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^0 \frac{dx}{1 - \sin x} &= \int_{-1}^0 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} \\ &= 2 \int_{-1}^0 \frac{dt}{1 + t^2 - 2t} \\ &= 2 \int_{-1}^0 \frac{dt}{(t-1)^2} \\ &= 2 \left[\frac{1}{1-t} \right]_{-1}^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

2.1.6 Intégrale généralisées

Le résultat suivant est une extension de la définition de l'intégrale définie $\int_a^b f(t)dt$ au cas où b tend vers $+\infty$ (et/ou a tend vers $-\infty$).

Définition 2.1.3 Soit f une fonction continue $\forall x > a$,

1. Si $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(x)dx$ admet une limite finie l , cette intégrale généralisée a donc un sens : on dit qu'elle converge. On pose

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = l.$$

2. Si $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(x)dx$ n'a pas de limite finie, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

Exemple 2.1.8

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = ?$$

Nous étudions d'abord l'intégrale

$$\int_0^X e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^X = -e^{-X} + 1.$$

Passons à la limite

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} (-e^{-X} + 1) = 1.$$

Cette limite existe, donc l'intégrale converge

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Exemple 2.1.9

$$\int_0^{\infty} e^x dx = ?$$

Etudions

$$\int_0^X e^x dx = [e^x]_0^X = e^X + 1.$$

La limite

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^x dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} (e^X + 1) = +\infty.$$

Donc l'intégrale diverge.

2.2 Equations différentielles

2.2.1 Introduction (Equation de Malthus)

Dans l'exemple suivant x désigne le nombre d'individus de la population étudiée (population humaine, population bactérienne,...). On considère

x comme un réel. L'hypothèse de base est que si $x(t)$ est la population à l'instant t , la population à l'instant $t + \Delta t$ où Δt est très petit, vaut

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + kx(t)\Delta t \\ k = cte > 0. \end{cases}$$

Divisant par Δt et passant à la limite quand $\Delta t \rightarrow 0$ on obtient l'équation différentielle du premier ordre

$$x'(t) = kx(t)$$

où $x'(t)$ est la dérivée par rapport à t .

Définition 2.2.1 1. On appelle équation différentielle du premier ordre l'équation du type

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.1}$$

où y est une fonction inconnue. Résoudre l'équation différentielle (2.1) consiste à chercher toutes les fonctions y dérivables en x vérifiant cette équation.

2. On appelle solution sur $I \subset \mathbb{R}$ de l'équation (2.1) toute fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y(x)$ telle que

- y est dérivable sur I
- $\forall x \in I, F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

Exemple 2.2.1 Soit l'équation $\begin{cases} y' = ky \\ k \neq 0 \end{cases}$, y est une fonction de x .

$$y' = y'(x) = \frac{dy}{dx} = ky(x)$$

$$\implies \frac{dy}{y} = kdx, y \neq 0$$

$$\implies \int \frac{dy}{y} = \int kdx$$

$$\begin{aligned} &\implies \ln |y| + c_1 = kx + c_2 \\ &\implies \ln |y| = kx + c, c = c_1 + c_2 \\ &\implies y = e^{kx+c} = \lambda e^{kx}, \lambda = e^c = cte \end{aligned}$$

Théorème 2.2.1 *Existence et unicité d'une solution satisfaisant une condition initiale.*

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Il existe une solution unique y de l'équation différentielle (2.2) telle que la condition initiale $y(x_0) = y_0$ est vérifiée.

Exemple 2.2.2 *Soit l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

La solution de cette équation est $y = \lambda.e^{kx}$ et on a $y(0) = 2$ alors

$$y(0) = \lambda e^{k \cdot 0} = \lambda = 2$$

donc la solution qui vérifiée la condition initiale $y(0) = 2$ est donnée par

$$y = 2.e^{kx}.$$

2.2.2 Equation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre

Définition 2.2.2 *Toute équation différentielle de la forme*

$$y' = f(x)y$$

est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre.

Résolution d'une équation linéaire du premier ordre sans second membre

$$\begin{aligned}
 y' &= f(x)y \implies \frac{dy}{dx} = f(x)y \\
 \implies \frac{dy}{y} &= f(x)dx \\
 \implies \int \frac{dy}{y} &= \int f(x)dx \\
 \implies \ln|y| &= \int f(x)dx + c \\
 \implies y &= e^{\int f(x)dx + c} \\
 \implies y &= \lambda e^{\int f(x)dx} \quad \text{où } \lambda = e^c.
 \end{aligned}$$

Exemple 2.2.3 Résoudre l'équation $y' - xy = 0$.

$$\begin{aligned}
 y' - xy &= 0 \implies y' = xy \\
 \implies \frac{dy}{dx} &= xy \\
 \implies \frac{dy}{y} &= xdx \\
 \implies \int \frac{dy}{y} &= \int xdx
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \ln|y| &= \frac{1}{2}x^2 + c \implies y = e^{\frac{1}{2}x^2 + c} \\
 \implies y &= e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^c \\
 \implies y &= \lambda e^{\frac{1}{2}x^2}, \lambda = \pm e^c.
 \end{aligned}$$

2.2.3 Equation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

Définition 2.2.3 Toute équation différentielle de la forme

$$y' = f(x)y + g(x) \tag{2.3}$$

est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.

Théorème 2.2.2 La solution générale (SGEASM) de l'équation (2.3) est donnée par

$$y = y_0 + Y$$

où y_0 est la solution générale de l'équation sans le second membre ($y' = f(x)y$) (SGESSM) et Y est la solution particulière de l'équation $y' = f(x)y + g(x)$. (SPEASM)

Résolution de l'équation par la méthode de variation de la constante

La solution générale de l'équation (2.3) sans second membre $y' = f(x)y$ est

$$y_0 = \lambda e^{F(x)} \quad \text{avec} \quad F(x) = \int f(x)dx.$$

Posons

$$y = SGEASM = \lambda(x)e^{F(x)},$$

alors

$$\begin{aligned} y' &= \lambda'(x)e^{F(x)} + \lambda(x)f(x)e^{F(x)} \\ &= f(x)\lambda(x)e^{F(x)} + g(x). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \lambda'(x)e^{F(x)} &= g(x) \implies \lambda'(x) = \frac{g(x)}{e^{F(x)}} = g(x)e^{-F(x)} \\ \implies \lambda(x) &= \int g(x)e^{-F(x)}dx + \beta. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y &= \left[\int g(x)e^{-F(x)}dx + \beta \right] e^{F(x)} \\ &= \underbrace{\beta e^{F(x)}}_{y_0} + \underbrace{e^{F(x)} \int g(x)e^{-F(x)}dx}_{Y} \end{aligned}$$

Exemple 2.2.4 Soit l'équation linéaire du premier ordre avec second membre $y' = -y + x^2$ avec $f(x) = -1$ et $g(x) = x^2$. On résoud d'abord l'équation sans second membre $y' = -y$. Alors

$$y_0 = SGESSM = \lambda e^{\int f(x)dx} = \lambda e^{-x}.$$

D'où

$$y = SGEASM = \lambda(x)e^{-x} \iff y' = \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x}$$

$$y' + y = \lambda'(x)e^{-x} - \underbrace{\lambda(x)e^{-x} + \lambda(x)e^{-x}}_0 = g(x) = x^2$$

$$\iff \lambda'(x) = \frac{x^2}{e^{-x}} \implies \lambda(x) = \int x^2 e^x dx.$$

A l'aide de deux intégrations par parties on obtient

$$\lambda(x) = e^x(x^2 - 2x + 2) + K \quad \text{où } K \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} y &= SGEASM \\ &= [e^x(x^2 - 2x + 2) + K]e^{-x} \\ &= \underbrace{x^2 - 2x + 2}_Y + \underbrace{Ke^{-x}}_{y_0}. \end{aligned}$$

2.2.4 Exemples d'autres équations différentielles (non linéaires)

A\ Equations à variables séparables

Définition 2.2.4 On appelle équation différentielle du premier ordre toute relation de la forme

$$b(y)y' - a(x) = 0$$

La séparation des variables passe par

$$b(y) \frac{dy}{dx} = a(x).$$

D'où

$$a(x)dx = b(y)dy.$$

La résolution La solution s'obtient par intégration de chaque membre :

$$\int a(x)dx = \int b(y)dy.$$

Exemple 2.2.5 Résoudre

$$y' = ky \tag{2.4}$$

avec $k \neq 0$. On a

$$\frac{dy}{dx} = ky \iff \frac{dy}{y} = kdx. (y \neq 0)$$

C'est une équation à variables séparables avec $a(x) = k$ et $b(y) = \frac{1}{y}$. Alors

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} = k \int dx &\iff \ln|y| + c_1 = kx + c_2 \\ &\iff \ln|y| = kx + c_3 \\ &\iff |y| = e^{kx+c_3} \\ &\iff y = \pm e^{kx} e^{c_3}. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de l'équation (2.4) est

$$y = ce^{kx}, c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.2.6 Soit l'équation $(1+x)y' = (1+y^2)$.

$$\begin{aligned} (1+x)y' &= (1+y^2) \iff (1+x)\frac{dy}{dx} = (1+y^2) \\ &\iff \frac{dy}{(1+y^2)} = \frac{dx}{(1+x)}, x \neq -1 \\ &\iff \int \frac{dy}{(1+y^2)} = \int \frac{dx}{(1+x)} \\ &\iff \arctan(y) = \ln|1+x| + c \\ &\iff y = \tan(\ln|1+x| + c), c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

B\ Equations différentielles homogènes

Définition 2.2.5 Une équation différentielle est dite homogène si, en remplaçant x par kx et y par ky , l'équation reste inchangée. Alors on peut écrire cette équation sous la forme

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right).$$

La résolution Pour la résolution, nous allons utiliser le changement de variable

$$t = \frac{y}{x}$$

donc

$$y = tx, dy = tdx + xdt$$

à substituer dans l'équation homogène permettant ainsi d'obtenir une équation à variables séparables de la forme

$$m(x)dx + n(t)dt = 0.$$

Après résolution en intégrant chaque membre, t est remplacé par $\frac{y}{x}$.

Exemple 2.2.7 Vérifier que l'équation $y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$ est homogène et la mettre sous la forme $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$.

$$\frac{(kx)(ky)}{(kx)^2(ky)^2} = \frac{k^2 xy}{k^2 x^2 + y^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2} = y'.$$

Transformons l'expression afin d'obtenir

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right) = h(t) : y' = \frac{x^2(y/x)}{x^2(1 + y^2/x^2)} = \frac{y/x}{1 + (y/x)^2} = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

avec $h(t) = \frac{t}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{xy}{x^2 + y^2} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2} \\ &\iff (x^2 + y^2)dy = xydx. \end{aligned}$$

En substituant y par tx et dy par $tdx + xdt$, on obtient

$$(x^2 + t^2x^2)(tdx + xdt) = tx^2dx.$$

En développant, puis en regroupant les dt dans un membre et les dx dans l'autre, on obtient :

$$(x^3(1 + t^2))dt = (-t^3x^2)dx(t \neq 0) \iff \underbrace{\frac{1 + t^2}{t^3}dt = -\frac{1}{x}dx}_{\text{équation à variables séparables}}$$

$$\iff \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\right)dt = \int -\frac{1}{x}dx$$

d'où

$$\iff \ln |t| - \frac{1}{2t^2} = -\ln |x| + k. \tag{2.5}$$

Sachant que $t = \frac{y}{x}$ alors

$$\ln \left| \frac{y}{x} \right| - \frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\ln |x| + k \iff \ln |y| - \frac{x^2}{2y^2} = k.$$

On aboutit à une fonction implicite $f(x, y) = 0$ qui ne permet pas d'exprimer y en fonction de x seul, mais x en fonction de y . On peut aussi présenter la solution sous forme d'équation paramétrique à partir de (2.5) :

$$\begin{cases} x = c \frac{e^{\frac{1}{2t^2}}}{t} \\ y = tx = ce^{\frac{1}{2t^2}} \end{cases} \quad \text{où } c = \pm e^k.$$

C\ Equation de Bernoulli

Une équation différentielle est dite de Bernoulli si elle est de la forme :

$$\begin{cases} y' = f(x)y + g(x)y^\alpha \\ \alpha \neq 0, \alpha \neq 1 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.6}$$

La résolution On a

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha \iff \frac{y'}{y^\alpha} = f(x)\frac{y}{y^\alpha} + g(x) = f(x)z + g(x).$$

On effectue le changement de variable $z = \frac{y}{y^\alpha} = y^{1-\alpha}$, donc

$$\begin{aligned} z' &= (1-\alpha)y^{1-\alpha-1}y' \iff z' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha} \\ \iff &\frac{z'}{(1-\alpha)} = \frac{y'}{y^\alpha} \\ \iff &\frac{z'}{(1-\alpha)} = f(x)z + g(x) \\ \iff &z' = (1-\alpha)f(x)z + (1-\alpha)g(x) \\ \iff &z' = F(x)z + G(x) \end{aligned}$$

c'est une équation différentielle du premier ordre avec second membre que l'on sait résoudre.

Exemple 2.2.8 Résoudre l'équation

$$xy' + y - xy^3 = 0, x \neq 0.$$

$$xy' = -y + xy^3 \iff y' = -\frac{y}{x} + y^3$$

c'est une équation de Bernoulli avec

$$f(x) = -\frac{y}{x}, g(x) = 1 \text{ et } \alpha = 3$$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^3} &= -\frac{1}{x}\frac{y}{y^3} + 1 \iff \frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{x}\frac{1}{y^2} + 1 \\ \iff &\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{x}\underbrace{y^{-2}}_z + 1. \end{aligned}$$

On a $z = y^{-2}$ alors

$$\begin{aligned} z' &= -2y^{-3}y' \iff \frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{2}z' \\ \iff -\frac{1}{2}z' &= -\frac{1}{x}z + 1 \\ \iff z' &= \frac{2}{x}z - 2 \end{aligned}$$

c'est une équation linéaire du premier ordre avec second ordre dont la solution est

$$z = cx^2 - 2x \implies y(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{cx^2 - 2x}}.$$

2.2.5 Equations différentielles du second ordre

Définition 2.2.6 On appelle équation différentielle du second ordre toute relation de la forme :

$$\forall x, F(x, y, y', y'') = 0$$

entre la variable x , la fonction y , sa dérivée première y' et sa dérivée seconde y'' .

A \ Equations différentielles du second ordre pouvant se ramener au premier ordre

Propriétés 2.2.1 Toute relation de la forme

$$\forall x, F(x, y', y'') = 0$$

c'est-à-dire sans y , peut se ramener à deux équations différentielles de premier ordre.

En effet, en posant $z = y'$ et $z' = y''$, la relation devient :

$$F(x, z, z') = 0.$$

Exemple 2.2.9 Résoudre

$$y'' + y' = 0.$$

En posant $z = y'$, l'équation devient :

$$z' + z = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= -z \iff \frac{dz}{z} = -dx \\ \iff \int \frac{dz}{z} &= - \int dx \\ \iff \ln |z| &= -x + c_1 \\ \iff z &= c_2 e^{-x}, c_2 = e^{c_1}. \end{aligned}$$

Or

$$y = \int z(x) dx = c_3 e^{-x} + c_4.$$

B \ Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

Définition 2.2.7 Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre est définie par l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2.7}$$

où $a (\neq 0)$, b et c sont des constantes réelles et y une fonction de x .

Définition 2.2.8 Soient y_1 et y_2 deux fonctions dérivables. On appelle **Wronskien** la fonction $W(y_1, y_2)$ associée à y_1 et y_2 par :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2.$$

Propriétés 2.2.2 Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (2.7), et que

le Wronskien est non nul, alors y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes (c'est-à-dire non proportionnelles) ($y_1 \neq ky_2$).

Propriétés 2.2.3 Si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.7), l'ensemble des solutions du système est donné par

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles.

La résolution Vérifions que les solutions y_1 et y_2 sont de la forme $y = e^{rx}$. On en déduit

$$y' = r e^{rx}, y'' = r^2 e^{rx}.$$

En les substituant dans l'équation (2.7), on obtient

$$ar^2 e^{rx} + br e^{rx} + ce^{rx} = (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0.$$

Or, $e^{rx} \neq 0$. D'où **l'équation caractéristique**

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Les solutions y_1 et y_2 dépendent des racines de cette équation caractéristique. D'où le calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Premier cas $\Delta > 0$: Alors l'équation caractéristique a deux racines $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et la solution générale de (2.7) est

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

Deuxième cas $\Delta = 0$: Alors l'équation caractéristique a une racine double $r = \frac{-b}{2a}$ et

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{rx}.$$

Troisième cas $\Delta < 0$: Alors $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ et la solution de l'équation (2.7) est

$$y = [c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x)]e^{\alpha x}.$$

Exemple 2.2.10 Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' = 0. \quad (2.8)$$

L'équation caractéristique

$$\begin{aligned} r^2 + 4r &= 0 \iff r(r + 4) = 0 \\ \iff r_1 &= -4 \text{ et } r_2 = 0 \end{aligned}$$

deux racines distinctes donc

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2.$$

L'équation (2.8) peut aussi être résolue par le changement de variables : $z = y'$.

Exemple 2.2.11 Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

L'équation caractéristique

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 1 &= 0 \iff (r + 1)^2 = 0 \\ \iff r &= -1 \end{aligned}$$

une racine double donc

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}.$$

Exemple 2.2.12 Résoudre l'équation

$$2y'' + 2y' + y = 0.$$

L'équation caractéristique : $2r^2 + 2r + 1 = 0$

$$\Delta = -4 = 4i^2 \iff r = \frac{-2 \pm 2i}{4} = \frac{-1 \pm i}{2}$$

donc (avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$)

$$y = [c_1 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + c_2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)]e^{-\frac{x}{2}}.$$

C\ Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre

Définition 2.2.9 Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

où a , b et c sont des constantes et $g(x)$ est le second ordre.

La résolution par la méthode de variation de la constante La forme de la solution sans second membre

$$y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

on déduit la forme de la solution générale avec second membre en considérant les constantes comme des fonctions de x . Posons

$$y(x) = SGEASM = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

où c_1 et c_2 sont désormais deux fonctions de x . Les fonctions c_1 et c_2 sont alors des solutions du système

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{g(x)}{a} \end{cases} .$$

Le déterminant de ce système est le Wronskien qui est non nul (y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes). D'après Cramer, la solution est unique :

$$\begin{cases} c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x)/a & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{-1}{a} \frac{y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)} \\ c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x)/a \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{1}{a} \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} c_1 = \frac{-1}{a} \int \frac{y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)} dx \\ c_2 = \frac{1}{a} \int \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)} dx \end{cases} .$$

Exemple 2.2.13 Résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre

$$y'' - 5y' + 6y = e^x .$$

– Recherche la SGESSM : y_0 de l'équation

$$y'' - 5y' + 6y = 0 .$$

L'équation caractéristique :

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \iff r_1 = 2, r_2 = 3$$

$$\implies y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, c_{1,2} \in \mathbb{R} .$$

– Recherche de SGEASM : y : En posant $y = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{3x}$ avec

$y_1(x) = e^{2x}, y_2(x) = e^{3x}$ alors

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{g(x)}{a} \end{cases} \iff \begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ 2c_1' e^{2x} + 3c_2' e^{3x} = e^x \end{cases} .$$

En utilisant la méthode de Cramer

$$\begin{cases} c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{-e^{4x}}{e^{5x}} = e^{-x} \\ c_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{e^{3x}}{e^{5x}} = e^{-2x} \end{cases} \iff \begin{cases} c_1' = e^{-x} + k_1 \\ c_2' = -\frac{1}{2}e^{-2x} + k_2 \end{cases} .$$

Alors

$$\begin{aligned} y &= (e^{-x} + k_1)e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + k_2\right)e^{3x} \\ &= \underbrace{k_1 e^{2x} + k_2 e^{3x}}_{y_0} + \underbrace{\frac{e^x}{2}}_Y . \end{aligned}$$

CHAPITRE 3

Chapitre 3 : Fonctions à plusieurs variables

Dans la pratique, il arrive très souvent qu'une grandeur étudiée dépende de plusieurs variables simultanément. Les fonctions à une variable traitées dans le premier chapitre ne sont alors pas adaptées à la modélisation des variations de ces grandeurs et il devient nécessaire d'introduire les fonctions à plusieurs variables, dont nous allons par la suite utiliser les applications dans le calcul d'erreur et la régression linéaire par moindres carrés. La notion de vecteurs utilisée en physique et en mécanique de fluides sera aussi présentée.

3.1 Définition d'une fonction à plusieurs variables

Définition 3.1.1 Une application définie sur un sous ensemble de \mathbb{R}^n et prenant des valeurs réelles est appelée **fonction à n variables** :

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 3.1.1 La pression P d'un gaz parfait est une fonction de trois va-

riables, sa température T , son volume V et le nombre de moles N :

$$P(N, V, T) = \frac{NRT}{V}, R = \text{cte.}$$

Définition 3.1.2 Si l'on fixe à des valeurs constantes toutes les variables d'une fonction à plusieurs variables sauf une, on obtient une fonction à une seule variable, appelée **application partielle**.

Exemple 3.1.2 Si on fixe le volume V et le nombre des moles N à des valeurs constantes ($V = V_0, N = N_0$), la pression P d'un gaz parfait dépend uniquement d'une seule variable c'est la température T

$$P(T) = \frac{N_0RT}{V_0}, R, V_0, N_0 = \text{cte.}$$

Définition 3.1.3 Une fonction f à deux variables est dite homogène de degré n si :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Exemple 3.1.3 Soit la fonction

$$f(x, y) = 3x^3 - 5x^2y + \frac{y^4 + x^2y^2}{2x - 3y}.$$

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= 3\lambda^3x^3 - 5\lambda^2x^2\lambda y + \frac{\lambda^4y^4 + \lambda^2x^2\lambda^2y^2}{2\lambda x - 3\lambda y} \\ &= \lambda^3\left(3x^3 - 5x^2y + \frac{y^4 + x^2y^2}{2x - 3y}\right) \\ &= \lambda^3 f(x, y), \end{aligned}$$

alors la fonction f est homogène de degré 3.

3.2 Continuité

Définition 3.2.1 – Une fonction f à n variables est dite continue en $x_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ si et seulement si : $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon)$ tel que :

$$\left. \begin{array}{l} |x - x_1^0| < \eta(\varepsilon) \\ |x - x_2^0| < \eta(\varepsilon) \\ \dots\dots\dots \\ |x - x_n^0| < \eta(\varepsilon) \end{array} \right\} \implies |f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)| < \varepsilon.$$

- On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.
- Si la fonction est continue en chaque point d'un sous ensemble E de \mathbb{R}^2 on dit qu'elle est continue sur E .
- Si f et g sont deux fonctions à n variables continues en x_0 , alors :
 1. $f + g$ est continue en x_0
 2. $f.g$ est continue en x_0
 3. f/g est continue en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.

3.3 Dérivées partielles

3.3.1 Dérivées partielles du premier ordre

Définition 3.3.1 Soit une fonction f à n variables et l'application partielle obtenue en fixant toutes les variables sauf x_k à des constantes $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. La dérivée (si elle existe) de l'application partielle au point x_k^0 définie par :

$$\lim_{x_k \rightarrow x_k^0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0)}{x_k - x_k^0}$$

est appelée **dérivée partielle** de f au point $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Propriétés 3.3.1 – Une fonction à n variables admet n dérivées partielles du premier ordre par rapport à x_1, x_2, \dots, x_n . On note $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ la dérivée partielle de f par rapport à x_k .

– Les règles de dérivation des fonctions à une variable s'appliquent aussi aux dérivées partielles. Plus particulièrement on a :

1. $\frac{\partial c}{\partial x_k} = 0 \quad \forall k$ (où $c = \text{cte}$)
2. $\frac{\partial x_k}{\partial x_k} = 1 \quad \forall k$
3. $\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = 0 \quad \forall (k, l)$ avec $k \neq l$.

Exemple 3.3.1 Trouver les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à T et par rapport à V de la pression P d'un gaz parfait

$$P(T, N, V) = \frac{NRT}{V}.$$

On calcule la dérivée partielle par rapport à T en considérant N et V comme des constantes :

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{NR}{V}.$$

De la même manière on calcule

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{-NRT}{V^2}.$$

3.3.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

La dérivée partielle de premier ordre d'une fonction f à n variables est aussi une fonction à n variables. Si les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ par rapport à ces variables existent, ces dérivées sont appelées dérivées partielles de second ordre de la fonction f et sont notées :

1. $\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \quad k \neq l$ (dérivée mixte)
2. $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.

Exemple 3.3.2 Trouver la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à V et la dérivée mixte d'ordre 2 par rapport à V et T de la pression P d'un gaz parfait.

On a calculé $\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{-NRT}{V^2}$ et $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{NR}{V}$. Alors

1. $\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{-NRT}{V^2} \right) = \frac{2NRT}{V^3}$.
2. $\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right) = \frac{-NR}{V^2}$, ou de manière équivalente $\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right) = \frac{-NR}{V^2}$. Donc

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right).$$

Théorème 3.3.1 (Schwartz)

Soit f une fonction de deux variables x et y . Si les dérivées partielles mixtes de second ordre existent et sont continues, alors :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

et on écrit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Définition 3.3.2 On appelle **matrice hessienne** en un point (x_0, y_0) d'une fonction f à deux variables, la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

3.3.3 Extrema d'une fonction à deux variables

Théorème 3.3.2 Soit f une fonction à deux variables x et y . Si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) et que f est dérivable par rapport à x et par rapport à y en x_0 et en y_0 , alors :

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Propriétés 3.3.2 Extremum : minimum ou maximum ?

On admettra que f est dérivable deux fois. Notons Δ le déterminant de la

matrice hessienne :

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ &= rt - s^2.\end{aligned}$$

1. Si $\Delta > 0$ et $r = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0 \implies (x_0, y_0)$ est un minimum.
2. Si $\Delta > 0$ et $r = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0 \implies (x_0, y_0)$ est un maximum.
3. Si $\Delta < 0 \implies (x_0, y_0)$ est un point selle (pas d'extremum).
4. Si $\Delta = 0 \implies$ cas indéterminé.

Exemple 3.3.3 Trouver les extrema de la fonction $f(x, y) = ax^2 + by^2$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

1. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2ax = 0 \implies x = 0$
2. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2by = 0 \implies y = 0$

alors $(0, 0)$ est un extremum. (minimum ou maximum ?). On a :

$$\begin{aligned}r &= \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} = 2a \\ t &= \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = 2b \\ s &= \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = 0\end{aligned}$$

$$\Delta = rt - s^2 = 4ab.$$

D'où :

1. Si a et b sont positifs, alors $r > 0$ et $\Delta > 0 \implies$ le point $(0, 0)$ est un minimum,
2. Si a et b sont négatifs, alors $r < 0$ et $\Delta > 0 \implies$ le point $(0, 0)$ est un maximum,
3. Si a et b sont de signes contraires, alors $\Delta < 0 \implies$ il n'existe pas d'extremum.

3.4 Différentielles

Définition 3.4.1 On appelle **différentielle partielle** par rapport à x_k d'une fonction f à n variables, l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k.$$

Définition 3.4.2 On appelle **différentielle** (en physique **différentielle totale** ou **différentielle exacte**) d'une fonction f à n variables :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Théorème 3.4.1 Pour qu'une fonction f à n variables soit **différentiable** en un point $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, il suffit que ses dérivées partielles du premier ordre existent et soient continues en x_0 . Une telle fonction f est appelée **régulière**.

3.5 Calcul d'erreur

Une des principales applications des différentielles totales est le calcul de propagation d'erreur. Il s'agit de déterminer l'erreur maximal d'un résultat de calcul faisant intervenir des paramètres expérimentaux imprécis.

3.5.1 Erreur absolu

Théorème 3.5.1 Soit f une fonction à n variables, régulière au point $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ avec chaque x_i^0 affecté d'une erreur Δx_i . L'erreur Δf induite par l'imprécision sur les x_i^0 peut être estimée par

$$|\Delta f| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right| \Delta x_i^0$$

Exemple 3.5.1 Calculer le nombre de moles contenues dans un gaz parfait maintenu dans un récipient qui mesure 1L avec une précision de 0.5%, à une

pression $P = 1\text{atm}$, déterminée avec une précision de 1% et thermostaté à 300K par un thermostat pouvant être réglé au 1/10 de degré près. On donne $R = 0.08205\text{atm L mol}^{-1}\text{K}^{-1}$.

Le nombre de moles N est donné par

$$\begin{aligned} N &= \frac{PV}{RT} \\ &= \frac{1 \times 1}{0.08205 \times 300} \\ &= 0.0406256\text{mol}. \end{aligned}$$

On calcule la différentielle

$$\begin{aligned} dN &= \frac{\partial N}{\partial P}dP + \frac{\partial N}{\partial V}dV + \frac{\partial N}{\partial T}dT \\ &= \frac{V}{RT}dP + \frac{P}{RT}dV - \frac{PV}{RT^2}dT. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \Delta N &\leq \left| \frac{V}{RT} \right| \Delta P + \left| \frac{P}{RT} \right| \Delta V + \left| -\frac{PV}{RT^2} \right| \Delta T \\ &\leq 0.0406256 \times 0.01 + 0.0406256 \times 0.005 \\ &\quad + 0.000135419 \times 0.1 \\ &\leq 0.000622926\text{mol}. \end{aligned}$$

On écrit

$$N = (0.0406 \pm 0.0006)\text{mol}.$$

La précision est d'environ 1.5%.

3.5.2 Erreur relative et différentielle logarithmique

Le calcul de l'erreur relative $\frac{\Delta f}{f}$ est obtenu facilement par le calcul de la différentielle logarithmique

$$d \ln |f| = \frac{df}{f}.$$

Exemple 3.5.2 *Revenant à l'exemple 3.5.1. Nous allons refaire le calcul en utilisant la différentielle logarithmique*

$$\begin{aligned}\ln N &= \ln \frac{PV}{RT} \\ &= \ln P + \ln V - \ln R - \ln T.\end{aligned}$$

Alors

$$d(\ln N) = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} - \frac{dT}{T}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta N}{N} &= \left| \frac{1}{P} \right| \Delta P + \left| \frac{1}{V} \right| \Delta V + \left| -\frac{1}{T} \right| \Delta T \\ &= 0.01 + 0.005 + \frac{0.1}{300} \\ &= 0.015 \\ &= 1.5\%\end{aligned}$$

On remarque qu'on a trouvé le même résultat, mais avec un moyen plus simple.

3.6 Méthode des moindres carrés

Soit y une grandeur expérimentale qui dépend d'une autre grandeur x linéairement

$$\hat{y} = a + bx.$$

Dans la pratique, la grandeur y sera mesurée avec une certaine erreur, les points (x, y) ne seront pas exactement alignés. Nous allons essayer de trouver une droite moyenne satisfaisant l'expérience. Pour cela, nous allons déterminer les valeurs a et b qui minimisent les écarts entre les points expérimentaux y_i et les points calculés par l'équation moyenne \hat{y}_i . La somme des carrés des écarts

est donnée par

$$S = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2.$$

S étant une fonction de deux variables, on calcule les dérivées partielles :

1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n 2(a + bx_i - y_i) = \sum_{i=1}^n 2a + \sum_{i=1}^n 2bx_i - \sum_{i=1}^n 2y_i \\ &= 2(na + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i), \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial b} &= \sum_{i=1}^n 2x_i(a + bx_i - y_i) = \sum_{i=1}^n 2x_i a + \sum_{i=1}^n 2bx_i^2 - \sum_{i=1}^n 2x_i y_i \\ &= 2(a \sum_{i=1}^n x_i + 2b \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i). \end{aligned}$$

Pour obtenir un extremum, il faut que $\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = 0$. Ceci nous amène à résoudre un système d'équations (dites équations normales) dont les inconnus sont a et b :

$$\begin{cases} na + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + 2b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases}$$

Alors, on obtient

$$a = \frac{-\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}.$$

On calcule les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$r = \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2n, t = \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2, s = \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2 \sum_{i=1}^n x_i.$$

On a bien un minimum car : $\Delta > 0$ et $r > 0$.

CHAPITRE 4

Chapitre 4 : Méthodes numériques

Soit la valeur expérimentale d'une grandeur y qui dépend d'une autre grandeur x et que l'on ne connaît pas l'expression analytique de la fonction f qui relie les deux valeurs. Dans ce cas, quel est le moyen utilisé pour le calcul des dérivées, calcul d'intégrales ? Dans ce chapitre, afin de répondre à cette question, nous allons introduire **les méthodes numériques**.

4.1 La courbe expérimentale et l'interpolation graphique

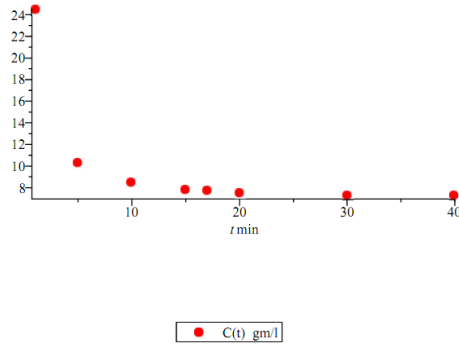
Lors d'une expérience, on obtient des résultats expérimentaux présentés sous la forme d'un tableau dit de **correspondance**.

Exemple 4.1.1 Soient les résultats expérimentaux donnés sous forme d'un tableau :

t (min)	1	5	10	15	17	20	30	40
$C(t)$ (mg/l)	24.5	10.30	8.50	7.8	7.70	7.45	7.30	7.25

Ces résultats sont représentés graphiquement par : Fig (4.1)

1. La grandeur C portée sur l'axe des ordonnées est appelée **variable à expliquer**, elle varie en fonction de t portée sur l'axe des abscisses qui

FIG. 4.1 – Evolution de $C(t)$ en fonction de t

est appelée *variable explicative*.

2. Par un tracé continu passant par tous les points expérimentaux, on obtient une *courbe dite expérimentale*.
3. La lecture sur la courbe expérimentale nous permet de déduire une interpolation graphique des données non mesurées sans connaître l'expression de C :
 - Quelle est la concentration au temps $t = 7$ min? graphiquement, elle est entre 8 et 9 mg/L.
 - A quel instant la concentration est-elle de 15 mg/L? graphiquement il est entre 3 et 4 min.

4.2 Calcul approché de dérivées

Nous allons donner dans cette section quelques résultats utilisés pour le calcul approché de la dérivée sans connaître l'expression analytique de la fonction f . Ces résultats découlent de la définition de la dérivée d'une fonction en un point comme étant la pente de la tangente en ce point.

Définition 4.2.1 Si la fonction f est mesurée expérimentalement en deux points : a et $a + h$ où h est petit, alors la valeur approchée de la dérivée

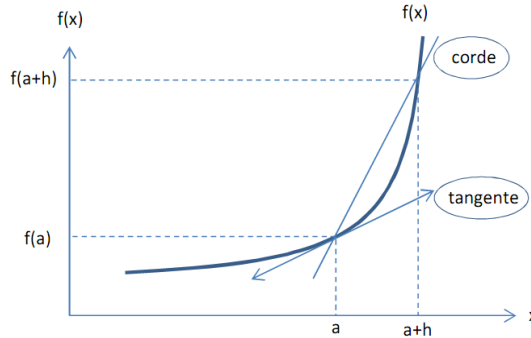


FIG. 4.2 – Valeur approchée de la dérivée

première $f'(a)$ est donnée par

$$\boxed{\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}}$$

Définition 4.2.2 Si la fonction f est mesurée expérimentalement en deux points : $a-h$ et $a+h$, alors la valeur approchée de la dérivée première $f'(a)$ est donnée par

$$\boxed{\boxed{\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}}}$$

Définition 4.2.3 Si la fonction f est mesurée expérimentalement au trois points : $a-h$, a et $a+h$, alors la valeur approchée de la dérivée seconde $f''(a)$ est donnée par

$$\boxed{\boxed{\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}}}$$

Exemple 4.2.1 Revenons à l'exemple 4.1.1 :

- $C'(t) = \frac{C(t+h)-C(t-h)}{2h}$.
- $C'(10) = \frac{C(15)-C(5)}{10} \simeq -0.25 \text{ mg/L/min}$, avec $h = 5$.
- $C'(20) = \frac{C(30)-C(10)}{20} \simeq -0.06 \text{ mg/L/min}$, avec $h = 10$.

4.3 Interpolations

Maintenant, nous allons donner une estimation de la fonction f en un point x pour lequel l'expérience n'a pas été réalisée.

4.3.1 Interpolation linéaire

L'interpolation linéaire suppose qu'entre deux points expérimentaux, la variation est linéaire.

Définition 4.3.1 *Si la fonction f est mesurée expérimentalement en deux points a et $a + h$, où h est petit. Alors pour $a < x < a + h$, $f(x)$ est estimée par :*

$$\boxed{\boxed{f(a) + (x - a) \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}}$$

Exemple 4.3.1 *(Suite de l'exemple 4.1.1). Estimer $C(7)$ par interpolation linéaire. Pour cela, il suffit de connaître la fonction C en deux points a et $a + h$. Soit $a < t < a + h$,*

$$C(t) \approx C(a) + (t - a) \frac{C(a + h) - C(a)}{h}$$

On a $5 < 7 < 10$, d'où $a = 5$ et $h = 5$

$$C(7) \approx C(5) + (7 - 5) \frac{C(10) - C(5)}{5} \approx 9.58 \text{mg/L.}$$

4.3.2 Interpolation parabolique

L'interpolation parabolique suppose qu'entre trois points expérimentaux, la variation est parabolique.

Définition 4.3.2 *La fonction f est mesurée expérimentalement en trois points $a - h$, a et $a + h$ où h est petit. Si $a - h < x < a + h$, alors f est estimée par*

$$\boxed{\boxed{f(a) + (x - a) \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + \frac{(x-a)^2}{2} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}}}$$

Exemple 4.3.2 Estimer $C(7)$ par interpolation parabolique. Dans ce cas, il suffit de connaître la fonction C en trois points : $a - h, a$ et $a + h$. Soit $a - h < x < a + h$ avec $a = 10$ et $h = 5$, alors

$$\begin{aligned} C(7) &\approx C(10) + (7 - 10) \frac{C(15) - C(5)}{10} + \frac{(7 - 10)^2}{2} \frac{C(15) - 2C(10) + C(5)}{5^2} \\ &\approx 9.45mg/L. \end{aligned}$$

4.4 Calcul approché de l'intégrale

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques méthodes numériques utilisées pour le calcul approché de l'intégrale d'une fonction f continue et définie entre deux bornes a et b : $\int_a^b f(x)dx$. Nous allons appliquer ces méthodes numériques dans le cas où :

- Le calcul de la primitive de f est impossible ;
- La fonction f est le résultat de mesures expérimentales en quelques points.

4.4.1 Méthode des rectangles pour deux points

Soit f une fonction mesurée expérimentalement en deux points a et $a + h$. Dans ce cas, f sera approchée par la droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = f(a)$. Par conséquent, la surface sous cette droite est un **rectangle** de bases h et $f(a)$ et d'aire $hf(a)$. Donc on a le résultat suivant

$$I = \int_a^{a+h} f(t)dt \approx hf(a)$$

4.4.2 Méthode des rectangles pour (n+1) points régulièrement répartis

Maintenant, la fonction f est la donnée des mesures expérimentales en $(n + 1)$ points. Ces points sont régulièrement répartis donnés par $(a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n =$

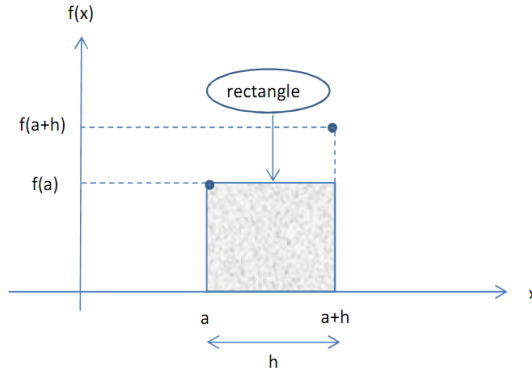


FIG. 4.3 – Méthode des rectangles pour deux points

b), où $x_i = a + ih$. Entre chaque deux points (x_i, x_{i+1}) la fonction f est approchée par une droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = f(x_i)$. Sous chaque droite, on obtient un rectangle de bases h et $f(x_i)$. Alors l'intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$ est estimée par la somme des aires de ces n rectangles

$$I \approx I_{rectangle} = \underbrace{hf(a)}_{\text{aire du 1}^{er}\text{rectangle}} + hf(x_1) + hf(x_2) + \dots + \underbrace{hf(x_{n-1})}_{\text{aire du } n^{i\grave{e}m}\text{rectangle}}$$

Donc on a le résultat

$$I \approx h \left\{ f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right\}$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Remarque 4.4.1 L'erreur d'estimation est donné par la différence entre la valeur exacte de l'intégrale notée I et la valeur approchée notée $I_{rectangle}$.

4.4.3 Méthode des trapèzes pour deux points

Considérons la fonction f mesurée expérimentalement en deux points a et $a + h$. Par cette méthode, la fonction f est approximée par une droite, sous cette droite on obtient un **trapèze** d'une petite base $f(a)$, grande base

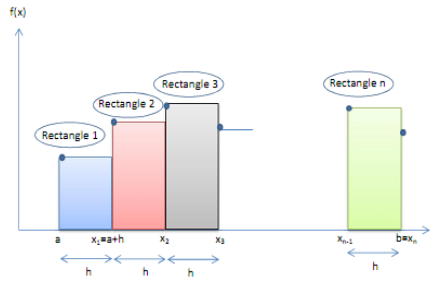


FIG. 4.4 – Méthode des rectangles pour $n+1$ points

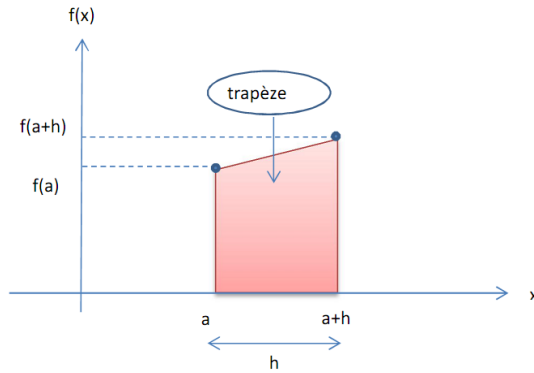


FIG. 4.5 – Méthode des trapèzes pour deux points

$f(a+h)$ et d'une hauteur h . Donc l'intégrale entre a et $a+h$ est estimée par l'aire de ce trapèze. D'où on a

$$I = \int_a^{a+h} f(t) dt \approx \frac{h}{2} \{f(a) + f(a+h)\}$$

4.4.4 Méthode des trapèzes pour (n+1) points régulièrement répartis

La fonction f est mesurée expérimentalement en $(n + 1)$ points régulièrement répartis ($a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b$). Entre chaque couples de points (x_i, x_{i+1}) on approxime f par une droite. Sous chaque droite on a un trapèze. L'intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$ est estimé par la somme des aires de n trapèzes.

$$I_{\text{trapèzes}} = \frac{h}{2} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right\}$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Remarque 4.4.2 L'erreur d'estimation est donné par la différence entre la valeur exacte de l'intégrale notée I et la valeur approchée notée $I_{\text{trapèzes}}$.

4.4.5 Méthode de Simpson pour trois points régulièrement répartis

La fonction f est mesurée expérimentalement en trois points régulièrement répartis $x - h, x$ et $x + h$. Comme on a trois points, on peut approximer la fonction f par un **arc de parabole** d'équation $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont à déterminer. Le calcul estimé de l'intégrale $I = \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$ est donné par l'aire sous cette parabole

$$I_{\text{Simpson}} = \frac{h}{3} \{ f(x - h) + 4f(x) + f(x + h) \}$$

4.4.6 Méthode de Simpson pour (n+1) points régulièrement répartis, n pair

La fonction f est mesurée en $(n + 1)$ points régulièrement répartis ($a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b$) où n est pair et $h = \frac{b-a}{n}$. La généralisation du résultat précédent (pour trois point) nous conduit à estimer l'intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$

par

$$I_{\text{Simpson}} = \frac{h}{3} \left\{ f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=0}^{(n-2)/2} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{(n-2)/2} f(x_{2i}) \right\}$$

Remarque 4.4.3 Pour un même h , la méthode de Simpson est plus précise que la méthode des trapèzes.

4.5 Résolution d'équations : Méthode de Newton-Raphson

Considérons l'équation $f(r) = 0$. Parfois la recherche de la solution r de cette équation par une méthode analytique est impossible. Pour cette raison, nous allons introduire dans ce paragraphe une méthode numérique (**Newton-Raphson**) qui peut rendre cette recherche est plus facile et qui va nous donner une valeur approchée de cette solution. Pour pouvoir appliquer la méthode de Newton-Raphson, la fonction f doit être **continue**, **monotone** et **dérivable** sur l'intervalle étudié.

La méthode :

- Étape 1 : fixer la précision ε cherchée sur l'approximation de la solution r .
- Étape 2 : mettre l'équation sous la forme $f(x) = 0$
- Étape 3 : calculer $f'(x)$
- Étape 4 : choisir graphiquement un point de départ x_0
- Étape 5 : calculer $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
- Étape 6 : comparer $|x_1 - x_0|$ à ε :
 1. si $|x_1 - x_0| < \varepsilon$: fin de la procédure $r = x_0 = x_1$
 2. si $|x_1 - x_0| > \varepsilon$: x_1 devient un nouveau point de départ et on calcule $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, puis on compare $|x_2 - x_1|$ à ε , et on poursuit les itérations en calculant x_3, \dots, x_{n+1} jusqu'à ce que $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

Remarque 4.5.1 – L'algorithme de Newton-Raphson converge si : $f'(x), f''(x) \neq 0$.

– x_0 est un choix convenable si $f'(x_0)f''(x_0) > 0$.

Exemple 4.5.1 Résoudre l'équation $\ln(x) = x - 2$ à 10^{-3} près.

1. la précision recherchée est $\varepsilon = 10^{-3}$
2. mettre l'équation sous la forme $f(x) = 0$: $f(x) = \ln(x) - x + 2 = 0$.
3. calculer $f'(x)$: $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$
4. la courbe $f(x)$ coupe l'axe des abscisses en deux points, l'une est proche de 0 et l'autre est proche de 3. choisissons un point de départ $x_0 = 3$
5. $x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3.147918433$
6. $|x_1 - x_0| = 0.147918433 > \varepsilon$, donc x_0 devient un nouveau point de départ

i	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$ x_{n+1} - x_n $	test
0	3	3,147918433	0,147918433	$> \varepsilon$
1	3,147918433	3,146193441	0,001724992	$> \varepsilon$
2	3,146193441	3,146193221	$2,2 \cdot 10^{-7}$	$< \varepsilon$

D'où $r \approx 3,146$

7. Si on prend un point de départ proche de 0 : $x_0 = 0,1$, alors on obtient

i	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$ x_{n+1} - x_n $	test
0	0,1	0,14473168	0,04473168	$> \varepsilon$
1	0,14473168	0,15786436	0,01313268	$> \varepsilon$
2	0,15786436	0,15859234	0,00072799	$< \varepsilon$

D'où $r \approx 0,159$

Deuxième partie

Probabilités

Probabilités, ou théorie des **probabilités**, branche des mathématiques qui s'attache à mesurer ou à déterminer quantitativement la probabilité qu'a un événement ou une expérience d'aboutir à un résultat donné.

Cette théorie utilise souvent les résultats de l'analyse combinatoire et notamment les dénombrements appelés permutations, arrangements et combinaisons. Elle constitue la base de tous les travaux en statistiques.

"Microsoft [®] Encarta [®] 2009. © 1993-2008"

CHAPITRE 5

Théorie des probabilités

5.1 Analyse combinatoire

5.1.1 Notion de factorielle

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(2)(1)$$

Par convention $0! = 1$.

5.1.2 Permutation

On appelle permutation de n objets discernables toute disposition ordonnée des n objets.

$$P_n = n!$$

Exemple 5.1.1 Soit $E = \{1, 2, 3\}$, alors $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1)$ sont permutations de E .

5.1.3 Arrangements

On appelle arrangement de p éléments pris parmi n ($p \leq n$) toute disposition ordonnée sans répétition (sans remise ou exhaustifs) de p objets pris parmi n objets discernables.

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple 5.1.2 Soit $E = \{a, b, c\}$ alors $(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)$ sont des arrangements de deux éléments de E .

Remarque 5.1.1 Si $n = p$ alors $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! = P_n$

5.1.4 Combinaisons

On appelle combinaison de p éléments pris parmi n ($p \leq n$) toute disposition non ordonnée de p objets pris parmi n objets discernables. Chaque objet ne pouvant intervenir qu'une fois

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple 5.1.3 Soit $E = \{a, b, c\}$, $p = 2$ alors $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ sont des combinaisons de deux éléments de E .

5.1.5 Propriétés des C_n^p

1. Si $0 \leq p \leq n$ alors $C_n^p = C_n^{n-p}$
2. Si $1 \leq p \leq n$ alors $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$
3. Si $n \geq 1$ alors $C_n^0 = 1, C_n^n = 1, C_n^1 = n$.

5.1.6 Triangle de Pascal

En utilisant la propriété $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$, on obtient une construction que l'on appelle **Triangle de Pascal**

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				

5.1.7 Formule du Binôme

La formule du Binôme est donnée par

$$\begin{aligned}
 (a + b)^n &= \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p \\
 &= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n
 \end{aligned}$$

5.2 Notion de probabilité

5.2.1 Expériences aléatoires

Une expérience aléatoire est une expérience qui, au moins théoriquement, peut être répétée aussi souvent que l'on veut et dont on ne peut pas prédire le résultat. Par exemple le jet d'un dé à jouer. Chaque fois que l'expérience est répétée, un **résultat élémentaire** est obtenu. L'ensemble des résultats élémentaires d'une expérience aléatoire est appelé **espace échantillon** ou **univers**, et noté Ω .

A/ Espaces échantillons discrets

Un espace échantillons est dit discret si :

1. Le nombre des résultats possibles est **fini**

Exemple 5.2.1 *On lance un dé et l'on observe le nombre qui apparaît,*
 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. Le nombre des résultats possibles est **infini dénombrable** (infini mais on peut associer un nombre naturel à chaque résultat)

Exemple 5.2.2 *On lance un dé jusqu'à ce qu'on obtienne le chiffre 5. Donc on peut compter le nombre de lancers effectués pour obtenir le premier 5, $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.*

B/ Espaces échantillons continus

Un espace échantillon est dit **continu** s'il contient un ou plusieurs intervalles (**infini non dénombrable**).

Exemple 5.2.3 *On lance un dé jusqu'à ce que l'on obtient le chiffre 2 et l'on calcule le temps que cela a pris pour obtenir ce premier 2. On alors $\Omega = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\} = (0, +\infty)$.*

5.2.2 Événements

A/ Définitions

Définition 5.2.1 *Un événement est un ensemble des résultats élémentaires. C'est-à-dire que c'est un sous-ensemble de l'univers.*

Remarque 5.2.1 1. *Chaque résultat est un événement*

2. *L'univers est un événement*

3. *Un résultat élémentaire est appelé aussi événement simple*

4. *Donc un événement composé est constitué de deux ou plusieurs résultats élémentaires.*

Exemple 5.2.4 1. *Considérons l'expérience aléatoire de jet de dé. Alors l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*

2. *Maintenant, considérons l'événement A : "obtention d'un chiffre pair". Alors $A = \{2, 4, 6\}$*

3. *Puis, nous définissons l'événement B : "obtention d'un chiffre impair". Alors $B = \{1, 3, 5\}$*

Remarque 5.2.2 1. Sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, A et B sont des événements composés et non simples. Mais si on considère un autre univers $\Omega' = \{\text{chiffres pairs, chiffres impairs}\}$, alors A et B sont des événements simples.

2. A une expérience aléatoire, n peut associer plusieurs univers.

Définition 5.2.2 Les événements A et B sont dits **incompatibles** ou **mutuellement exclusifs** s'ils ne peuvent être réalisés en même temps. D'une autre manière si leur intersection est vide $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 5.2.5 – Reprendre le même exemple "jet de dé" et observer le chiffre qui apparaît.

– Donc, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

– Soient les événements : $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ et $C = \{3, 5\}$.

– On a $A \cap B = \{2, 4\}$ et $A \cap C = \emptyset$. Donc A et C sont **incompatibles**.

Logique des événements

1. L'une des meilleurs façons pour représenter facilement les opérations logiques des événements, est le **diagramme ensembliste**.
2. La théorie des ensembles avec toutes ces propriétés est peut être appliquer pour les événements.
3. L'événement qui contient tous les résultats de l'expérience aléatoire est dit **événement certain** $E = \Omega$.
4. Un événement qui n'est jamais réalisé est dit **événement impossible** $E = \emptyset$.
5. **Union d'événements** : $A \cup B$: " A est réalisé **ou** B est réalisé"
6. **Intersection des événements** : $A \cap B$: " A est réalisé **et** B est réalisé"
7. **Complémentarité** : $\bar{A} = A_c$: complémentaire de A , $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$ (A et \bar{A} sont incompatibles).
8. On appelle événement **exhaustif** ou **complet** toute ensemble d'événements $A_i (i = 1, \dots, n)$ vérifiant :

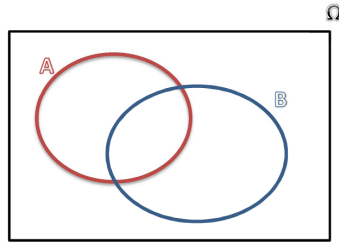


FIG. 5.1 – Union

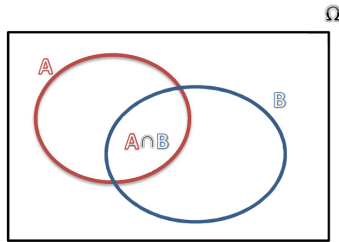


FIG. 5.2 – Intersection

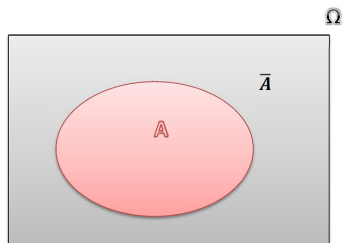


FIG. 5.3 – Complémentaire de A

- $A_i \neq \emptyset, \forall i$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

5.2.3 Probabilité

Soient deux événements A et B :

Axiome 1 : La probabilité d'un événement A est un nombre compris entre 0 et 1, noté $P(A)$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Axiome 2 : La probabilité de l'événement certain Ω est $P(\Omega) = 1$

Axiome 3 : 1. Si A et B sont deux événements incompatibles, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2. La probabilité de l'événement impossible est $P(\emptyset) = 0$.

Définition 5.2.3 Soit l'univers Ω

1. On définit la probabilité sur Ω comme étant un nombre appartenant à $[0, 1]$ associé à chaque événement élémentaire E_i de Ω et noté $P(E_i)$, tel que

$$P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) = 1$$

2. La probabilité de toute événement A de Ω est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

5.3 Probabilités totales

Le résultat suivant exprime la probabilité de réaliser A ou B .

Théorème 5.3.1

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Maintenant, on considère trois événements A , B et C

Théorème 5.3.2

$$\begin{array}{|l} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{array}$$

Exemple 5.3.1 Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte. Calculer la probabilité d'obtenir un trèfle ou un roi.

- L'événement A : "tirer un roi"
- L'événement B : "tirer un trèfle"
- Alors $P(A) = 4/32$ et $P(B) = 8/32$
- Remarquons le ou entre les deux événements, donc nous allons appliquer le théorème des probabilités totales :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- En vérifiant la compatibilité : Les événements A et B sont compatibles car la probabilité de l'événement $A \cap B$: "tirer le roi de trèfle" est $P(A \cap B) = 1/32$
- Donc

$$P(A \cup B) = 4/32 + 8/32 - 1/32 = 11/32$$

- On a retranché $P(A \cap B)$ car le roi de trèfle est compté deux fois, une fois dans A et une fois dans B .

5.4 Probabilités conditionnelles

- Considérons une expérience aléatoire, A et B sont deux événements tels que la réalisation de B influence la réalisation de A .
- La probabilité de réaliser A sachant que B a été réalisée est dite **probabilité conditionnelle de A sachant B** et s'écrit $P(A/B)$
- Autrement dit : elle est le calcul de la probabilité de A sur le sous-ensemble réduit B de Ω .

Soit l'exemple

Exemple 5.4.1 1. Le nombre d'enfants dans une crèche est 300 :

- (a) 190 sont des filles
- (b) 200 enfants habitent la même ville.
- (c) Parmi ces 200 enfants qui habitent la même ville 100 sont des filles.

2. Si on choisit un enfant au hasard, et on s'intéresse aux trois événements :

- (a) A : "L'enfant habite la même ville."
- (b) B : "L'enfant est une fille"
- (c) $A \cap B$: "L'enfant est une fille qui habite la même ville."

Alors $P(A) = \frac{200}{300}$, $P(B) = \frac{190}{300}$, $P(A \cap B) = \frac{100}{300}$

3. Maintenant, si on sait que l'enfant est une fille, alors l'ensemble des références est plus restreint, il est constitué de 190 filles et la probabilité qu'elle habite la même ville sachant qu'elle est une fille est

$$P(A/B) = \frac{100}{190}$$

nombre des filles qui habitent la même ville/le nombre des enfants filles.

4. A remarquer que $\frac{100}{190} = \left(\frac{100}{300}\right) / \left(\frac{190}{300}\right)$

5. Plus généralement,

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$$

6. Sur l'ensemble restreint à 190 enfants, la probabilité que la fille n'habite pas la même ville est le complément à 1 de $\frac{100}{190} : \frac{90}{190}$, donc

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$$

5.4.1 Théorème des probabilités composées

- Le théorème suivant sera utilisé pour calculer la probabilité de réaliser A **et** B .
- On a $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$ avec $P(B) \neq 0$
- Or $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

Théorème 5.4.1

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)$$

5.4.2 Événements indépendants

Définition 5.4.1 1. Les deux événements A et B sont dits **indépendants** si la réalisation ou la non-réalisation de B ne modifie pas la réalisation de A

$$P(A/B) = P(A)$$

2. Si A et B sont indépendants alors

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Remarque 5.4.1 Ne pas confondre indépendance et incompatibilité.

5.4.3 Tirage avec ou sans remise

Dans cette section, nous allons bien assimiler la notion d'indépendance et de dépendance avec le biais des tirages avec ou sans remise. Soit l'**exemple explicatif** suivant :

"Soit une urne contenant n boules rouges notées (R) et $N - n$ boules blanches notées (B). Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges?"

A/ Tirage avec remise (non exhaustif)

Soit R_1 l'événement "obtenir une boule rouge au premier tirage", R_2 l'événement "obtenir une boule rouge au deuxième tirage".

Dans ce cas, (tirage avec remise) la composition de l'urne reste constante au cours des tirages. Donc les tirages sont indépendants :

$$P(R_1/R_2) = P(R_2).$$

La probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage

$$P(R_1) = P(R_2) = \frac{n}{N}.$$

Donc

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_2/R_1)P(R_1) = P(R_1)P(R_2) = \left(\frac{n}{N}\right)^2$$

B/ Tirage sans remise (exhaustif)

Ici, la composition de l'urne change au cours des tirages. Après le premier tirage d'une boule rouge, il reste $n - 1$ boules rouges sur $N - 1$ boules au total

$$P(R_1) = \frac{n}{N}$$

$$P(R_2/R_1) = \frac{n-1}{N-1}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(R_1 \cap R_2) + P(\bar{R}_1 \cap R_2) \\ &= P(R_1)P(R_2/R_1) + P(\bar{R}_1)P(R_2/\bar{R}_1) \end{aligned}$$

où

$$P(\bar{R}_1) = 1 - \frac{n}{N}$$

et

$$P(R_2/\bar{R}_1) = \frac{n}{N-1}$$

Alors

$$P(R_2) = \frac{n}{N} \frac{n-1}{N-1} + \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{n}{N-1}$$

$$P(R_2) = \frac{n}{N}.$$

5.4.4 Applications

Application 1 :

Dans une population, la probabilité de naissance d'un garçon est 0.52. Dans cette population : 3% des filles et 2% des garçons présentent un ictère du nourrisson.

1. Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né présente un ictère?
2. Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né présentant un ictère soit une fille?

Méthode

- Exprimer les données du texte et les questions posées en termes de probabilité.
- Analyser les événements pour déterminer s'ils sont associés par l'opération **ou** ou **et**
- vérifier la compatibilité.

Alors :

Question 1 :

- Les événements sont notés : F , G et I .
- On a

$$P(G) = 0.52$$

$$P(F) = 1 - 0.52 = 0.48$$

$$P(I/F) = 0.03$$

$$P(I/G) = 0.02$$

- On calcule $P(I) = ?$
- L'événement I est réalisé de deux façons :
 - Par E_1 : le nouveau-né est une fille et elle présente un ictère :
 $E_1 = I \cap F$

ou

- Par E_2 : le nouveau-né est un garçon **et** il présente un ictère :
 $E_2 = I \cap G$
- Pour l'opération **ou** nous allons appliquer le théorème des probabilités totales avec E_1 et E_2 sont incompatibles

$$P(I) = P(E_1) + P(E_2)$$

- Pour l'opération **et** nous allons appliquer le théorème des probabilités composées

$$P(E_1) = P(I \cap F) = P(F)P(I/F)$$

$$P(E_2) = P(I \cap G) = P(G)P(I/G)$$

Donc

$$P(I) = 0.0248$$

Question 2 :

Il nous demande de calculer $P(F/I)$ (probabilité conditionnelle)

$$P(I \cap F) = P(F)P(I/F) \tag{5.1}$$

et

$$P(I \cap F) = P(F \cap I) = P(I)P(F/I) \tag{5.2}$$

De (5.1) et (5.2) on a :

$$P(F/I) = \frac{P(F)P(I/F)}{P(I)} = 0.581$$

Application 2

Dans un lot de 18 ampoules pour soluté injectable. 4 sont défectueuses. On tire simultanément 2 ampoules. calculer la probabilité :

1. Pour qu'elles soient toutes les deux défectueuses
2. Pour qu'aucune ne soient défectueuse

3. Pour qu'une au moins soit défectueuse

Méthode

Dans cet exemple le tirage est sans remise. Soient les événements :

- * def_1 : "La première ampoule est défectueuse"
- * def_2 : "La deuxième ampoule est défectueuse"
- * $def_{1,2}$: "Les deux ampoules sont défectueuses"

1. On a $P(def_1) = \frac{4}{18}$ et $P(def_2/def_1) = \frac{3}{17}$
alors

$$\begin{aligned} P(def_2) &= P(def_{1,2}) = P(def_1 \cap def_2) \\ &= P(def_1)P(def_2/def_1) \\ &= \frac{4}{18} \frac{3}{17} = \frac{2}{51} \end{aligned}$$

2. $P(def_{aucune}) = P(\overline{def_1}) \cap P(\overline{def_2}) = ?$

On a $P(\overline{def_1}) = 1 - \frac{4}{18} = \frac{14}{18}$ et $P(\overline{def_2}/\overline{def_1}) = \frac{13}{17}$

alors

$$P(def_{aucune}) = P(\overline{def_1})P(\overline{def_2}/\overline{def_1}) = \frac{91}{153}$$

3. En général, l'événement "un au moins" est le contraire de "aucun".
Donc

$$\begin{aligned} P(def_{une-au-moins}) &= 1 - P(def_{aucune}) \\ &= 1 - \frac{91}{153} \\ &= \frac{62}{153}. \end{aligned}$$

5.4.5 Arbre probabiliste

On peut simplement traiter un exercice de probabilités conditionnelles en construisant un arbre qui résume toutes les données du problème Fig 5.4

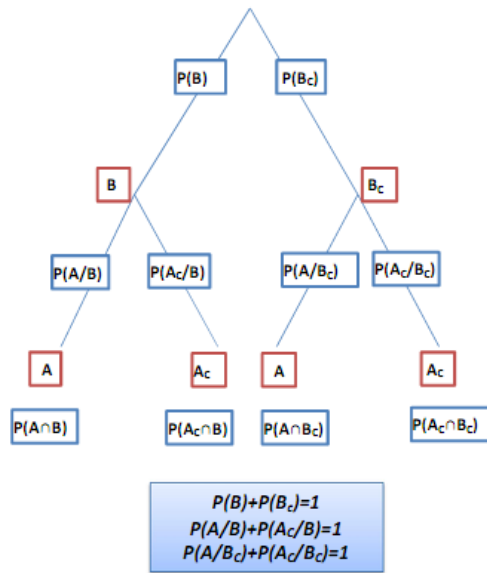


FIG. 5.4 – Arbre probabiliste

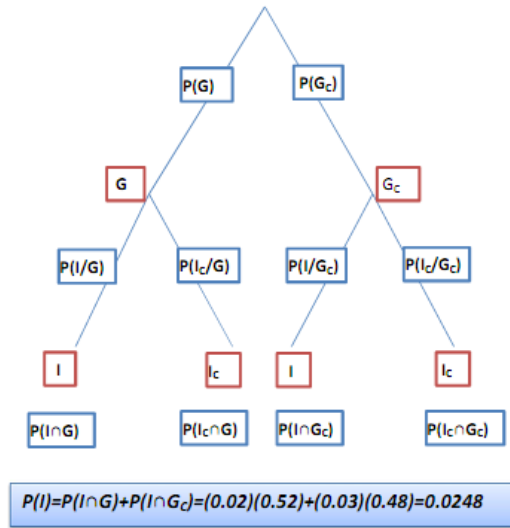


FIG. 5.5 – Arbre probabiliste

Exemple 5.4.2 *Considérons l'exemple de l'application 1. L'arbre probabiliste associée est donnée par Fig 5.5*

5.5 Théorème de Bayes ou théorème de la probabilité des causes

Dans le théorème des probabilités composées on s'intéressait à la probabilité de réaliser un événement E sachant qu'une certaine cause s'était réalisée. Si on considère que E est réalisé, cette réalisation pouvant être due à plusieurs causes C_1, C_2, \dots . On pose la question suivante : "Sachant que E est réalisé, calculer la probabilité que ce soit à cause de C_1 (ou C_2, \dots) ?"

Remarque 5.5.1 *Ces causes doivent former un système complet.*

5.5.1 Cas de deux causes

Soient C_1 et C_2 deux causes possibles telles que $C_2 = \overline{C_1}$. On a

$$P(C_1 \cap E) = P(C_1)P(E/C_1) = P(E)P(C_1/E)$$

$$P(C_1/E) = \frac{P(C_1)P(E/C_1)}{P(E)}$$

où

$$P(E) = P(C_1)P(E/C_1) + P(C_2)P(E/C_2)$$

Alors

$$P(C_1/E) = \frac{P(C_1)P(E/C_1)}{P(C_1)P(E/C_1) + P(C_2)P(E/C_2)}$$

et

$$P(C_2/E) = \frac{P(C_2)P(E/C_2)}{P(C_1)P(E/C_1) + P(C_2)P(E/C_2)}$$

5.5.2 Généralisation à plusieurs causes

Dans ce cas, on suppose qu'on a n causes C_i telles qu'elles forment un système complet. Alors

$$P(C_i/E) = \frac{P(C_i)P(E/C_i)}{P(C_1)P(E/C_1) + \dots + P(C_i)P(E/C_i) + \dots + P(C_n)P(E/C_n)}$$

Exemple 5.5.1 *Trois machines A, B et C produisent respectivement 40%, 35% et 25% du nombre total des comprimés fabriqués par un laboratoire pharmaceutique. Chacune de ces machines produit respectivement 5, 6 et 3% de comprimés défectueux.*

1. *On prend un comprimé au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il soit défectueux ?*
2. *On prend un comprimé au hasard. On constate qu'il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été produit par la machine A ?*

Méthode :

On exprime les causes sous forme des probabilités :

5.5. Théorème de Bayes ou théorème de la probabilité des causes

$$P(A) = 0.4, P(B) = 0.35 \text{ et } P(C) = 0.25$$

Soit l'événement observé D : "comprimé défectueux"

$$P(D/A) = 0.05, P(D/B) = 0.06 \text{ et } P(D/C) = 0.03$$

1. Calcul de $P(D)$:

La réalisation de D peut être due à chacune des trois causes. Ces trois causes sont incompatibles :

2. Maintenant, on sait que l'événement "comprimé défectueux" est réalisé.

On cherche la probabilité de la cause "machine A"

$$\begin{aligned} P(A/D) &= \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} \\ &= \frac{0.4 \times 0.05}{0.0485} \\ &= 0.41. \end{aligned}$$

CHAPITRE 6

Variables aléatoires discrètes

Soit l'expérience aléatoire "**lancer d'une pièce de monnaie**". L'univers Ω est l'ensemble des deux événements élémentaires équiprobables : A : "obtention de pile" et B : "obtention de face"

$$P(A) = 1/2, P(B) = 1/2$$

Maintenant, on appelle X le nombre de fois où l'événement B est réalisé. Alors au cours d'un lancer, $X = 1$ ou 0 . On dit que X est **une variable aléatoire**

$$P(X = 1) = P(X = 0) = 1/2$$

Définition 6.0.1 *Une variable aléatoire X est définie sur un univers Ω , en associant à chaque résultat de l'expérience aléatoire un nombre réel x caractéristique de ce résultat.*

6.1 Définition d'une variable discrète

Définition 6.1.1 *Une variable aléatoire X est dite **discrète** si l'ensemble des réalisations possibles x_1, x_2, \dots, x_n pour cette variables est fini ou dénombrable*

Exemple 6.1.1 La variable aléatoire X associée à l'événement "un individu traité développe-t-il une allergie ?" a deux réalisations possibles :

- "l'individu développe une allergie" c'est l'état associé au succès codé par 1
 - "l'individu ne développe pas une allergie" c'est l'état d'échec codé par 0
- X est une variable aléatoire discrète ayant deux réalisations : 0 et 1.

6.2 Loi de probabilité

Définition 6.2.1 1. À chacune des réalisations x_i de la variable aléatoire X est associée une probabilité $P(X = x_i) = p_i$ ($0 \leq p_i \leq 1$). L'ensemble des couples (x_i, p_i) forme **une loi de probabilité** si la somme de toutes ces probabilités est égale à 1

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n p_i = 1, i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{cas fini})$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, i = 1, 2, \dots \quad (\text{cas infini})$$

2. Une variable aléatoire peut se synthétiser par un tableau :

$X = x_i$	x_1	x_2	...	x_n	
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	$\sum_{i=1}^n p_i = 1$

3. En général, une variable aléatoire se représente par un **diagramme en bâtons**.

Exemple 6.2.1 On reprend l'exemple 6.1.1. Soit p la probabilité de développer une allergie à ce traitement et soit $q = 1 - p$ la probabilité de ne pas développer une allergie : $P(X = 1) = p = 0.1$ et $P(X = 0) = q = 1 - p = 0.9$

$X = x_i$	0	1	
$P(X = x_i)$	0.9	0.1	1

6.3 Fonction de répartition

Définition 6.3.1 *La fonction de répartition, associée à la variable aléatoire X , est la fonction, notée F ou $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$*

$$F(x) = F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

D'où :

- Si $x < x_1 : F(x) = 0$
- Si $x_1 \leq x < x_2 : F(x) = p_1$
- Si $x_2 \leq x < x_3 : F(x) = p_1 + p_2$
-
- Si $x_{n-1} \leq x < x_n : F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1}$
- Si $x \geq x_n : F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1} + p_n = 1$

La représentation graphique de $F(x)$ est une fonction en escalier continue à droite en tout point mais discontinue à gauche en chacune des réalisations de la variable aléatoire. voir Fig.

Propriétés 6.3.1 1. $0 \leq F(x) \leq 1$

2. $F(x)$ est croissante, si $a < b$ alors $F(a) < F(b)$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Exemple 6.3.1 Suite de l'exemple 6.1.1

1. Si $x < 0$ alors $F_X(x) = P(X \leq x) = 0$
2. Si $0 \leq x < 1$, alors $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = 0.9$
3. Si $x \geq 1$, alors $F_X(x) = P(X \leq x)$
 $= P(x = 0) + P(x = 1)$
 $= 0.9 + 0.1$
 $= 1$

Propriétés 6.3.2 On a

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

d'où

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

6.4 Paramètres caractéristiques

Soit X une variable aléatoire à n réalisations possibles x_1, x_2, \dots, x_n

6.4.1 Espérance mathématique

Définition 6.4.1 On appelle *espérance mathématique* de la variable X noté $E(X)$ la somme de toutes les réalisations possibles de X pondérées par leurs probabilités respectives :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Exemple 6.4.1 Suite de l'exemple 6.1.1

$$E(X) = [0 \times P(X = 0)] + [1 \times P(X = 1)] = 0.1$$

Propriétés 6.4.1 Soient X et Y deux variables aléatoires.

1. L'espérance est un opérateur linéaire :
 - $E(a) = a, \forall a \in \mathbb{R}$
 - $E(aX + b) = aE(X) + b, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$
 - $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
 - $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$
2. X et Y sont dites indépendantes ssi :

$$E(X, Y) = E(X) \times E(Y).$$

6.4.2 Moments

Définition 6.4.2 On appelle :

1. **Moment d'ordre r**

$$E(X^r) = \sum_{i=1}^n x_i^r p_i$$

$$2. \text{ Moment centré d'ordre } r \quad E\{[X - E(X)]^r\} = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^r p_i$$

Remarque 6.4.1 *L'espérance est un moment d'ordre 1.*

Exemple 6.4.2 *Suite de l'exemple 6.1.1*

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i = [0^2 \times 0.9] + [1^2 \times 0.1] = 0.1$$

6.4.3 Variance

Définition 6.4.3 *La variance de la variable aléatoire X , noté $V(X)$, est le moment centré d'ordre 2 (espérance mathématique du carré de la variable aléatoire X centrée)*

$$V(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 p_i$$

Propriétés 6.4.2 1. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - (\sum_{i=1}^n x_i p_i)^2$

2. *Soit X une variable discrète, alors :*

(a) $V(X) \geq 0$

(b) $V(a) = 0$

(c) $V(aX) = a^2 V(X)$

(d) $V(X + a) = V(X)$

3. *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, Si X et Y sont indépendantes alors*

$$V(X + Y) = V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$

la réciproque est fausse.

Exemple 6.4.3 *Suite de l'exemple 6.1.1*

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0.1 - (0.1)^2 = 0.09$$

6.4.4 Écart-type

Définition 6.4.4 *L'écart-type de la variable aléatoire X , noté $\sigma(X)$ ou σ_X , est la racine carrée de la variance*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

6.4.5 Mode ou valeur modale

Définition 6.4.5 *Le mode de la variable X , noté Mo , est la (les) valeur(s) de la réalisation de X qui a (ont) la plus grande probabilité de réalisation :*

$$P(X = Mo) \geq P(X = x_i), \forall x_i$$

6.5 Variable centrée réduite

Définition 6.5.1 *Soit X une variable aléatoire discrète avec $E(X) = m$ et $V(x) = \sigma(X)^2$. On appelle **variable aléatoire centrée réduite** associée à X , la variable aléatoire Y définie par :*

$$Y = \frac{X - m}{\sigma(X)}$$

On a :

1. $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1 \implies Y$ est une v.a **centrée réduite**.
2. $E(Y) = 0 \implies Y$ est une v.a **centrée**.
3. $V(Y) = 1 \implies Y$ est une v.a **réduite**.

Exemple 6.5.1 *Suite de l'exemple 6.1.1*

Notons U la variable : $U = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - 0.1}{0.3}$

La variable X a deux réalisations possibles $x = 0$ et $x = 1$:

* Si $x = 0$, alors la réalisation correspondante pour la variable U est $u = -1/3$

* Si $x = 1$, alors $u = 3$

$$P(X = 0) = P(U = -1/3) = 0.9$$

et

$$P(X = 1) = P(U = 3) = 0.1$$

6.6 Principales lois de variables discrètes

6.6.1 Loi de Bernoulli

Définition 6.6.1 Soit une expérience aléatoire ayant deux résultats possibles : $E = \{\text{le succès}\}$ et $\bar{E} = \{\text{l'échec}\}$ avec

$$P(E) = p, 0 \leq p \leq 1$$

$$P(\bar{E}) = 1 - p = q, 0 \leq q \leq 1$$

cette épreuve est appelée **expérience de Bernoulli**. On lui associe une variable aléatoire discrète X ayant deux réalisations possibles :

- * 0 : état associé à l'échec
- * 1 : état associé au succès

$P(E) = P(Y = 1) = p$
$P(\bar{E}) = P(Y = 0) = 1 - p = q$

Paramètres caractéristiques : $X \sim \text{Bernoulli}$	
Réalisation :	$X = 0$ ou 1
Probabilités :	$\begin{cases} P(X = 1) = p \text{ avec } 0 \leq p \leq 1 \\ P(X = 0) = q \text{ avec } 0 \leq q \leq 1 \end{cases}$
Espérance mathématique :	$E(X) = p$
Variance :	$V(X) = pq$
Écart-type :	$\sigma(X) = \sqrt{pq}$

Exemple 6.6.1 Suite de l'exemple 6.1.1

La variable aléatoire X : "avoir une allergie" suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0.1$. D'où $E(X) = p = 0.1$ et $V(X) = pq = 0.09$

6.6.2 Loi binomiale

La loi binomiale est utilisée dès qu'il s'agit d'un décompte de succès parmi n épreuves répétées, identiques et indépendantes à deux issues seulement : succès et échec.

Définition 6.6.2 La somme de n variables aléatoires de Bernoulli $Y_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ indépendantes de la même paramètre p est une variable aléatoire X discrète qui suit une **loi binomiale** de paramètre n et $p, (0 \leq p \leq 1)$:

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \mathcal{B}(n, p).$$

Remarque 6.6.1 Une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre 1 et p est une variable aléatoire de Bernoulli.

Paramètres caractéristiques $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.	
Réalisation :	$X = 0, 1, 2, 3, \dots, n$
Probabilités :	$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ avec $q = 1 - p$
Probabilités successives :	$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{q}$
Espérance mathématique :	$E(X) = np$
Variance :	$V(X) = npq$
Ecart-type :	$\sigma(X) = \sqrt{npq}$
Mode	$np + p - 1 \leq Mo \leq np + p$

Théorème 6.6.1 Si $X \sim \mathcal{B}(n_X, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_Y, p)$ avec X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même paramètre p , alors la variable aléatoire S , somme de ces deux variables, suit une loi binomiale :

$$S = X + Y \sim \mathcal{B}(n_X + n_Y, p)$$

6.6.3 Loi de poisson

La loi de poisson modélise des comptages d'événements rares (la probabilité de réalisation de ces événements est faibles) : maladies rares, accidents mortels rares, radioactivité...

Définition 6.6.3 On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de poisson de paramètre réelle positif λ , notée $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si elle prend des valeurs entières dont les probabilités de réalisation sont définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Paramètres caractéristiques $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	
Réalisation :	$X = 0, 1, 2, 3, \dots$ (cas dénombrable)
Probabilités :	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
Probabilités successives :	$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{\lambda}{k+1}$
Espérance mathématique :	$E(X) = \lambda$
Variance :	$V(X) = \lambda$
Ecart-type :	$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$
Mode :	$\lambda - 1 \leq Mo \leq \lambda$

Théorème 6.6.2 Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ avec X et Y deux variables aléatoires indépendantes, alors la variable aléatoires S : somme de X et Y , suit aussi une loi de Poisson :

$$S = X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

Propriétés 6.6.1 Si n est grand, p petit et np fini, alors $\{X \sim \mathcal{B}(n, p)\}$ peut être approximée par $\{X \sim \mathcal{P}(\lambda)\}$ avec $\lambda = np$.

6.6.4 Loi hypergéométrique

La loi hypergéométrique est utilisée lors d'un décompte de succès parmi n épreuves répétées à deux issues seulement : succès et échec. La probabilité

de succès est modifiée d'un tirage à l'autre. (tirage sans remise)

Paramètres caractéristiques $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$	
Réalisation :	$X = k, \max(0, n - Nq) \leq k \leq \min(n, Np)$
Probabilités :	$P(X = k) = \frac{C_{Np}^k C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}$ avec $q = 1 - p$
Probabilités successives :	$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{n-k}{k+1} \frac{Np-k}{Nq-n+k+1}$
Espérance mathématique :	$E(X) = np$
Variance :	$V(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$
Ecart-type :	$\sigma(X) = \sqrt{npq \frac{N-n}{N-1}}$

Propriétés 6.6.2 Si n et p sont fixés, quand $N \rightarrow \infty$, alors $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$ peut être approximée par $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

CHAPITRE 7

Variables aléatoires continues

Lors de l'étude d'un comportement de grandeurs physiques, telles que la concentration d'un médicament ou la taille d'un individu, les variables aléatoires discrètes ne sont pas adaptées. Dans ce cas, nous devons utiliser les variables aléatoires continues.

7.1 Définition d'une variable aléatoire continue

Définition 7.1.1 *Une variable aléatoire est dite continue si son domaine de variation est l'ensemble \mathbb{R} ou un intervalle de \mathbb{R} .*

Exemple 7.1.1 *Le poids et la taille d'un individu sont des variables aléatoires continues. Car le domaine de variation de chacune est un intervalle de \mathbb{R} .*

7.2 Fonction de répartition

Définition 7.2.1 Une variable aléatoire continue X peut être définie par sa fonction de répartition F ou F_X :

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Propriétés 7.2.1 1. F est continue

2. F est croissante $x_1 \leq x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F(x) \leq 1.$

Exemple 7.2.1 Soit F définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Propriétés 7.2.2 A l'aide de la fonction de répartition on peut calculer la probabilité

$$P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1).$$

Exemple 7.2.2 Suite de l'exemple 7.2.1.

On a

$$P(0.3 < X \leq 0.8) = F(0.8) - F(0.3) = 0.8 - 0.3 = 0.5.$$

7.3 Fonction densité de probabilité

Définition 7.3.1 Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X . On appelle **fonction densité de probabilité** de X , la fonction

$$f : f(x) = F'(x).$$

Propriétés 7.3.1 1. $\forall x, f(x) \geq 0$

2. f est une fonction intégrable et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Remarque 7.3.1 A partir de la fonction densité de probabilité $f(x)$, on peut calculer la fonction de répartition

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Exemple 7.3.1 Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ a|x| & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

f est-elle une fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X ? Donner la fonction de répartition correspondante.

1. $f(x) \geq 0 \implies a \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \implies \int_{-1}^0 a(-x)dx + \int_0^1 a(x)dx = 1$

$$\implies \left[\frac{-ax^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{ax^2}{2} \right]_0^1 = 1$$

$$\implies \boxed{a = 1}$$

3. La fonction de répartition :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0dt & \text{si } x < -1 \\ \int_{-1}^{-1} 0dt + \int_{-1}^x -tdt & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \int_{-1}^0 -tdt + \int_0^x tdt & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^0 -tdt + \int_0^1 tdt + \int_1^x 0dt & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 0 + \frac{1-x^2}{2} = \frac{1-x^2}{2} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1+x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

7.4 Paramètres caractéristiques d'une variable aléatoire continue

7.4.1 Espérance

Définition 7.4.1 *L'espérance d'une variable aléatoire continue X de densité de probabilité f est donnée par :*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

si cette intégrale existe.

Propriétés 7.4.1 *Soient X et Y deux variables aléatoires continues, a est une constante, alors :*

- $E(X + a) = E(X) + a$
- $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$.

7.4.2 Variable aléatoire continue centrée

Définition 7.4.2 *Un variable aléatoire est dite **centrée** si son espérance est nulle $E(X) = 0$.*

7.4.3 Moments

Définition 7.4.3 *Le **moment** d'ordre r d'une variable aléatoire continue est défini par :*

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx.$$

7.4.4 Variance et écart-type

Définition 7.4.4 *La **variance** d'une variable aléatoire continue X est définie comme le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire continue centrée*

$X - E(X)$:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$$

aussi

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Remarque 7.4.1 *La variance est positive.*

Propriétés 7.4.2 *Soient X et Y deux variables aléatoires continues, a est une constante, alors :*

- $V(X + a) = V(X)$
- $V(a \cdot X) = a^2 V(X)$
- *Si X et Y sont indépendantes, alors*

$$V(X + Y) = V(X - Y) = V(X) + V(Y).$$

Définition 7.4.5 *L'écart-type d'une variable aléatoire continue est :*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

7.4.5 Variable aléatoire continue centrée réduite

Définition 7.4.6 *Une variable aléatoire continue est dite **centrée réduite** si* $E(X) = 0$ *et* $\sigma(X) = 1$.

Remarque 7.4.2 *La variable aléatoire* $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ *est centrée réduite quelle que soit la variable aléatoire continue* X .

7.4.6 Médiane et mode

Définition 7.4.7 *La **médiane** d'une variable aléatoire continue est le nombre réel noté Me tel que* $F(Me) = 0.5$.

Autrement dit : la médiane correspond à la valeur de X qui divise la distribution en deux parts équiprobables : $P(X \leq Me) = P(X \geq Me) = 0.5$.

Définition 7.4.8 *Le mode M_0 est la (ou les) valeur(s) qui correspond(ent) à un maximum locale de la fonction densité de probabilité.*

Remarque 7.4.3 *La fonction densité de probabilité a un seul maximum est appelée **unimodale**.*

Exemple 7.4.1 *Suite de l'exemple 7.2.1*

$$\begin{aligned}
 - E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 \cdot dx + \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx + \int_0^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 0.5 \\
 - V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - [E(X)]^2 \\
 &= \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - 0.5^2 = \frac{1}{12} \approx 0.0833 \\
 - \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \approx 0.289 \\
 - \begin{cases} F(Me) = 0.5 \\ x \notin [0, 1] \implies F(x) = 0 \end{cases} &\implies Me \in [0, 1] \\
 &\text{et comme } F(x) = x \text{ sur } [0, 1], \text{ alors } F(Me) = 0.5 \implies Me = 0.5.
 \end{aligned}$$

7.5 Principales loi de variables aléatoires continues

7.5.1 Loi uniforme

La loi uniforme est celle qui correspond à une densité de probabilité constante pour tout l'ensemble de variations de la variable aléatoire. cette loi est rencontrée lors de tirage d'un nombre aléatoire compris dans un intervalle $[a, b]$.

Définition 7.5.1 *La fonction densité de probabilité d'une loi uniforme sur*

l'intervalle $[a, b]$ est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

* La fonction de répartition : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$
* $E(X) = \frac{a+b}{2}$
* $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

7.5.2 Loi normale (loi de Laplace-Gauss)

La loi normale est la loi de la probabilité la plus utilisée pour les variables aléatoires continues notamment pour les variables des caractères biométriques : la taille, le poids,..., pour les variations morphologiques,...

La loi normale est définie par son espérance μ et son écart-type σ et notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Définition 7.5.2 – La fonction densité de probabilité d'une **loi normale** $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, x \in \mathbb{R}.$$

– La fonction de répartition de la loi normale est donnée par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

– La loi normale est une loi unimodale avec $E(X) = Me = Mo = \mu$.

7.5.3 Loi normale centrée réduite

Pratiquement, on utilise beaucoup la loi normale, pour éviter le calcul numérique de sa fonction de répartition, on utilise **la loi normale centrée réduite** dont les valeurs sont tabulées.

Théorème 7.5.1 Soit X une v.a.c suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Si on effectue le changement $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$, on a

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(U \leq u) = F_U(u).$$

1. La **v.a.c centrée réduite** U suit une **loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0, 1)$.
2. $F_U(u) = 1 - F_U(-u) = 1 - G_U(u)$
3. $P(|U| < u) = 2F_U(u) - 1$.

Théorème 7.5.2 (Théorème central limite)

Soient X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes suivant des lois de probabilités quelconques d'espérance $E(X_i)$ et de variance finie σ_i^2 . Alors la loi suivi par la variable aléatoire : $X = \sum_{i=1}^n X_i$ peut être approximé pour n grand, et sous certaines conditions par une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ avec

$$\mu = \sum_{i=1}^n E(X_i) \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}.$$

7.5.4 loi log normale

Définition 7.5.3 Si la variable aléatoire continue $\ln(X)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ alors la variable aléatoire continue X suit une loi log-normale, dont la fonction densité de probabilité est définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{et} \quad V(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

7.6 Approximations des lois

Pratiquement le calcul de probabilité avec la loi exacte de la variation aléatoire est difficile. Pour cela, et sous certaines conditions, il est possible d'approximer la loi exacte par une autre loi dont le calcul devient plus facile.

7.6.1 Approximation de la loi binomiale par une loi normale

Si la moyenne d'une loi binomiale n est grande, la loi binomiale tend vers une loi normale avec la même moyenne et le même écart-type que la binomiale de départ.

$$\boxed{\begin{array}{l} n > 25 \\ \text{Si } np > 5 \\ nq > 5 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} n > 25 \\ np > 5 \\ nq > 5 \end{array}} \right\} \text{ alors } \mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}).$$

7.6.2 Approximation de la loi de Poisson par une loi normale

Lorsque la moyenne d'une loi de Poisson est grande, la loi de Poisson peut être approximée par une loi normale de mêmes moyenne et écart-type.

$$\boxed{\text{Si } \lambda > 5 \text{ alors } \mathcal{P}(\lambda) \approx \mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda}).}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Bénéazth, et als. Biomathématiques, Analyse, Algebre, probabilités, statistiques. Masson, Paris, 2001.