THÉORIE DES TESTS

BOUALEM BENSEBA

1. Problématique

Devant des phénomènes aléatoire, l'expérimentation nous impose la prise de décision.

Selon les résultats d'expériences et dans un contexte incertain, la décision porte sur une activité risquée

Exemple. considérons les situations suivantes

- Après expérimentation d'un nouveau traitement sur des malades, décider si celui-ci est meilleur
- Au vu des résultats d'une batterie de tests médicaux, décider de la nocivité des OGM, des relais de téléphones portables
- Suivant les résultats d'investigations, décider lors d'un procès si l'accusé est innocent ou coupable.

2. Hypothèse nulle

La décision consiste à trancher entre deux hypothèses notées H_0 et H_1, appelées respectivements hypothèse nulle hypotèse alternative.
On suppose qu'une seule de ces hypothèses est vraie.

Le test d'hypothèse consiste à choisir entre H_0 et H_1.

Deux erreurs sont possibles lors de la prise de décision

- Décider que H_1 est vraie alors que H_0 est vraie : dite erreur de $1ère$ espèce
- Décider que H_0 est vraie alors que H_1 est vraie : dite erreur de $2ème$ espèce

En général une des erreurs est plus grave que l'autre.

Exemple. Exemples d'erreurs

- En thérapie, on peut opter pour un nouveau traitement moins efficace, voire pire que l'ancien, ou s'en priver s'il est plus efficace
- Dépenser des fortunes en vaccins inutiles, ou subir une pandémie grave à large échelle
- Condamner un innocent, ou innocenter un coupable.

Définition. On appelle seuil, ou niveau de signification d'un test, La probabilité notée α de l'erreur de première espèce, qui est celle de rejeter H_0.

$1 - \alpha$ est appelée niveau de confiance du test.

La probabilité de décider H_1 ou de rejeter H_0 est appellée puissance du test et est notée β

La probabilité de l'erreur de deuxième espèce est notée $1 - \beta$, est appelée risque client

Vérité / *Décision*	H_0	H_1
H_0	$1-\alpha$	$1-\beta$
H_1	α	β

3. Mise en oeuvre

- On utilise un échantillon représentatif dont on mesure les paramètre d'un caractère donné.
- On mesure la confiance à accorder aux estimations des paramètres irés de l'échantillon par rapport à leurs vraies valeurs dans la population.
- Si $\alpha = 5\%$, il y a 5 chances sur 100 que, si H_0 est vraie, l'échantillon ne donne pas une valeur de l'observation comprise dans la zone d'acceptation de H_0.
- Cela revient à accorder 95% de confiance au résultat du test

3.1. **Estimation d'une proportion.** On considère un caractère p d'une population $\mathcal{P}$.
Soit p_0 une proportion fixée intuitivement et $p_{\mathcal{E}}$ celle de l'échantillon
On suppose l'hypothèse nulle $H_0 : p = p_0$ et l'hypothèse alternative $H_1 : p \neq p_0$
On détermine l'intervalle d confiance de la moyenne (cas de grands échantillons)

$$\mathrm{IC} = \left[p_{\mathcal{E}} - t_\alpha \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\,;\, p_{\mathcal{E}} + t_\alpha \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \right]$$

Si $p \in \mathrm{IC}$, alors on accepte $H_0\ :\ p = p_0$, sinon on rejette H_0.

Exemple.
Dans un echantillon de taille 100, un caractère est présent chez 51 individus. Peut-on faire l'hypothèse, au risque de5%, que ce caractère est présent au moins une fois sur 2 dans la population.

Le nombre X d'individus ayant ce caractère sui la loi binomiale $\mathcal{B}\,(100, 0, 51)$
Comme $n = 100 > 30$, $np = 51 > 5$ et $n(1-p) = 49 > 5$, alors $X \sim \mathcal{N}\,(51, 5)$
L'intervalle de confiance de la proportion est

$$\begin{aligned} \mathrm{IC} &= \left[0,51 - 1,96\sqrt{\frac{0,5\,(1-0,5)}{100}}\,;\, 0,51 + 1,96\sqrt{\frac{0,5\,(1-0,5)}{100}} \right] \\ \mathrm{IC} &= [0,412\,;\, 0,608] \end{aligned}$$

$p = 0,5 \in \mathrm{IC}$, alors on accepte l'hypothèse qu'il y a au moins 50% d'individus de la population présente ce caractère.

3.2. **Estimation d'une moyenne.** Dans une population, on pense que la valeur moyenne d'un caractère est m
Dans un échantillon de taille n, on observe une estimation ponctuelle m_0.
On calcule, au risque α, un intervalle de confiance de m au vu de m_0

$$\mathrm{IC} \ = \left[m_0 - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\, m_0 + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

où σ est l'écart type de l'échantillon.
Si $m \in \mathrm{IC}$, alors on accepte $H_0\ :\ m = m_0$, sinon on ne présage pas d'une autre valeur.

Exemple.

On veut estimer la taille moyenne d'une frange de la population. On tire un échantillon de taille 100 dont on observe que la moyenne des tailles est $169cm$ et d'écart type $0,1$.
Peut-on faire l'hypothèse, au risque de 5%, que la taille moyenne de cette frange de la population est $m = 175cm$?

$$\text{IC}\left[169 - 1,96\frac{0,1}{10}\,;\,169 + 1,96\frac{0,1}{10}\right][167\,;\,171]$$

$m = 175 \notin$ IC, alors on refuse l'hypothèse H_0

3.3. **Comparaison de deux estimations.**

(1) Cas d'une proportion

On tire d'une populations deux échantillons de tailles n_1 et $n_1(n_1$ et $n_2 > 30)$ dont on observe les proportions p_1 et p_2.

Au risque α, peut-on faire l'hypothèse H_0 :la différence $d = |p_1 - p_2|$ n'est pas significative.

On calcule l'écart type σ des deux échantillons

$$\sigma = \sqrt{\frac{p_1\left(1-p_1\right)}{n} + \frac{p_2\left(1-p_2\right)}{n_2}}$$

On accepte H_0 si $d \leq t_\alpha \sigma$

(2) Cas d'une moyenne

On tire d'une populations deux échantillons de tailles n_1 et n_1 dont on observe les moyennes μ_1 et μ_2 et les écarts types σ_1 et σ_2

Au risque α, peut-on faire l'hypothèse H_0 :la différence $d = |\mu_1 - \mu_2|$ n'est pas significative.

On calcule l'écart type S des deux échantillons

$$S = \sqrt{\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{\sigma_2}{n_2}}$$

On accepte H_0 si $d \leq t_\alpha S$

Exemple.

Dans une population d'étuiants se présentant au concours de résidanat, on a pris deux échantillons l'un composé de 500 étudiantes et l'autres de 300 étudiants. A l'anonce des résultats, on a observé une réussite de 160 étudiantes et de 102 étudiants.
Peut-on faire l'hypothèse, au risque $\alpha = 5\%$, que le taux de réussite est le même chez les étudiantes et les étudiants.

Il s'agit d'une comparaison de 2 proportions provenant de 2 échantillons

On a $n_1 = 500$, $n_2 = 300$, $p_1 = 0,32$ et $p_2 = 0,34$

Alors, l'écart type des deux échantillons est

$$\sigma = \sqrt{\frac{p_1\left(1-p_1\right)}{n} + \frac{p_2\left(1-p_2\right)}{n_2}} = 0,034$$

On pose $d = p_2 - p_1 = 0,02$, comme $t_\alpha \sigma = 0,067$, alors $d = 0,02 \leq t_\alpha \sigma = 0,067$

Exemple.

Pour étudier le poids des individus de 2 populations, on prélève deux échantillons sur lesquels on observe les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \text{Echantillon 1 :} n_1 &= 285\,;\, m = 78,7 \text{ kg et } \sigma_1 = 10 \\ \text{Echantillon 2 :} n_2 &= 500\,;\, m_2 = 80,1 \text{ kg et } \sigma_2 = 12 \end{aligned}$$

Peut-on admettre, au risque $\alpha = 5\%$, que le poids moyen est le même dans les deux populations ?

On a $d = |m_1 - m_2| = 80,1 - 78,7 = 1,4$, et l'écart type des échantillons est

$$S = \sqrt{\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{\sigma_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{100}{285} + \frac{144}{500}} = 0,8$$

Comme $1,4 < t_\alpha S = 1,57$, on accepte l'hypothèse d'un poids moyen commun M dans les deux populations, et on a

$$M = \frac{m_1 n_1 + m_2 n_2}{n_1 + n_2} = 79,6 \text{ kg}$$

Département de Pharmacie dAlger