I. INTRODUCTION HISTORIQUE.

1) Résolution de l'équation du troisième degré : $(E_1) : x^3 + 3x - 2 = 0$ par la méthode de Cardan (1501 - 1576, le même que celui qui a inventé les... cardans).

D1

2) Résolution de l'équation de Bombelli (1526 - 1573) : $(E_2) : x^3 = 15x + 4$.

α) Par la recherche d'une solution "évidente".

D2

β) par la méthode de Cardan.

D3

Bien que cette équation possède trois solutions réelles, on s'aperçoit que la méthode de Cardan oblige à considérer des nombres "imaginaires", dont le carré est négatif...

II) DÉFINITION DE $\mathbb{C}$ ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

1) Problème : trouver un sur-ensemble de $\mathbb{R}$ muni d'une addition et d'une multiplication prolongeant celles de $\mathbb{R}$ et conservant les mêmes règles opératoires, et tel qu'il existe un élément i dont le carré est égal à -1.

Si c'est possible, on doit avoir, pour x et y réels :

$(x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$
$(x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx')$

D4

d'où la

DEF : l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels, muni des deux opérations :

$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$

2) Propriétés de + dans $\mathbb{C}$:

P1 : $(x, y) + (x', y') = (x', y') + (x, y)$ (commutativité)
P2 : $(x, y) + ((x', y') + (x'', y'')) = ((x, y) + (x', y')) + (x'', y'')$ (associativité)
P3 : $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$ (d'où l'existence d'un élément neutre)
P4 : $(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$ (donc tout élément possède un symétrique)

D5

Ces 4 propriétés font de $(\mathbb{C}, +)$ un groupe commutatif.

Propriétés de . dans $\mathbb{C}$:

P5 : $(x, y)(x', y') = (x', y')(x, y)$ (commutativité)
P6 : $(x, y)((x', y')(x'', y'')) = ((x, y)(x', y'))(x'', y'')$ (associativité)
P7 : $(x, y)((x', y') + (x'', y'')) = (x, y)(x', y') + (x, y)(x'', y'')$ (distributivité)
P8 : $(x, y)(1, 0) = (x, y)$ (d'où l'existence d'un élément neutre)

D6

Adjointes aux 4 premières, ces 4 propriétés font de $(\mathbb{C}, +, .)$ un *anneau commutatif*.

Il reste une neuvième propriété pour que $(\mathbb{C}, +, .)$ soit un *corps commutatif* :

P9 : si $(x, y) \neq (0, 0)$ alors il existe (x', y') tel que $(x, y)(x', y') = (1, 0)$
(tout complexe non nul possède un symétrique pour la multiplication)

On démontrera cette propriété ultérieurement : il est à noter qu'elle n'est pas évidente a priori ; par exemple si on avait défini la multiplication par $(x, y)(x', y') = (xx' + yy', xy' + yx')$ (avec un + à la place du $-$), on aurait encore obtenu un anneau, mais plus un corps.

3) Écriture algébrique $x+iy$ d'un complexe.

a) On remarque que :

1. $(x,0)+(x',0)=(x+x',0)$
2. $(x,0)(x',0)=(xx',0)$
3. L'application $x\mapsto(x,0)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers l'ensemble des complexes de deuxième coordonnée nulle.

D7

D'où l'identification (abus d'écriture) : $(x,0)=x$

b) Si l'on pose $i=(0,1)$, alors $i^2=-1$

D8

PROP et DEF : Tout complexe $z=(x,y)$ s'écrit sous la forme : $x+iy$; x est la *partie réelle* (notée $\operatorname{Re}(z)$) de z et y sa *partie imaginaire* (notée $\operatorname{Im}(z)$). Les complexes de partie réelle nulle sont appelés les imaginaires purs.

REM 1 : la partie imaginaire d'un complexe est un réel !

REM 2 : on a donc $x+iy=x'+iy'\Leftrightarrow x=x'$et $y=y'$, mais attention ceci n'est valable que si x,y sont réels ; par exemple :

$$i+i.i=-1+i.1 \text{ et pourtant } i\neq-1$$

Par convention, dans la suite de ce cours, z sera toujours un complexe de partie réelle x et de partie imaginaire y.

4) Conjugué d'un complexe.

DEF : $\overline{z}=x-iy$ est le *conjugué* de z.

Propriétés :

1. $\overline{\overline{z}}=z$
2. $z+\overline{z}=2x$, d'où $\operatorname{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z+\overline{z}=0$.
3. $z-\overline{z}=2iy$, d'où $i\operatorname{Im}(z)=\dfrac{1}{2}(z-\overline{z})$; z est réel $\Leftrightarrow z=\overline{z}$.
4. $z\overline{z}=x^2+y^2\in\mathbb{R}_+$
5. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$

D9

5) Module d'un complexe.

DEF : $|z|=\sqrt{z\overline{z}}\left(=\sqrt{x^2+y^2}\right)$ est le *module* de z.

REM 1 : le module, comme sa notation l'indique, prolonge la valeur absolue sur $\mathbb{R}$.

REM 2 : il vaut mieux le plus possible utiliser cette relation au carré : $\boxed{|z|^2=z\overline{z}=x^2+y^2}$.

Propriétés :

6. $\lvert\overline{z}\rvert=\lvert-z\rvert=\lvert z\rvert$
7. $z=0\Leftrightarrow \lvert z\rvert=0$
8. $\lvert\lvert z\rvert-\lvert z'\rvert\rvert\leqslant\lvert z+z'\rvert\leqslant\lvert z\rvert+\lvert z'\rvert$ (inégalités triangulaires gauche et droite)
9. $\lvert zz'\rvert=\lvert z\rvert\,\lvert z'\rvert$
10. $zz'=0\Leftrightarrow z=0$ ou $z'=0$ (un produit de complexes est nul ssi l'un d'eux est nul)

D10

Lemme pour 8 : $|z+z'|^2=|z|^2+|z'|^2+2\operatorname{Re}\left(z\overline{z'}\right)$.

6) application : $(\mathbb{C},+,.)$ est un corps.

PROP : si $z \neq 0$

$$\boxed{z\left(\frac{1}{z\overline{z}}.\overline{z}\right)=1}$$

la propriété P9 ci-dessus est donc vérifiée avec $x' = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ et $y' = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$;
tout complexe non nul possède donc un symétrique pour la multiplication : $(\mathbb{C},+,.)$ est un corps.
D11

Notation : le nombre $\dfrac{1}{z\overline{z}}.\overline{z}$ est noté $\dfrac{1}{z}$, et, comme dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{z'}z = z.\dfrac{1}{z'}$ est noté $\dfrac{z}{z'}$.
A bien savoir :

$$\boxed{\frac{1}{i}=\overline{i}=-i}$$

Les relations 2. et 3. ci-dessus peuvent donc s'écrire :

$\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$
$\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

Et on a aussi :

$\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$
$\left\lvert\dfrac{z}{z'}\right\rvert = \dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$ $(z' \neq 0)$
z est de module 1 ssi son conjugué est égal à son inverse
$\dfrac{z}{\lvert z\rvert}$ et $\dfrac{z}{\overline{z}}$ $(z \neq 0)$ sont toujours de module 1.

D12

7) Problème de l'existence d'une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.

PROP : On peut trouver sur $\mathbb{C}$ des relations d'ordre total prolongeant l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, vérifiant :

1. $z \leqslant z$
2. $z \leqslant z'$ et $z' \leqslant z \Rightarrow z = z'$
3. $z \leqslant z'$ et $z' \leqslant z'' \Rightarrow z \leqslant z''$
4. $z \nleqslant z' \Rightarrow z \geqslant z'$
5. si z et z' sont réels, $z \leqslant z'$ a la signification habituelle.

par contre, on ne peut pas en trouver qui soit de plus compatible avec l'addition et la multiplication, c'est-àdire :

6. $z \leqslant z' \Rightarrow z + z'' \leqslant z' + z''$
7. si $z'' \geqslant 0$, $z \leqslant z' \Rightarrow zz'' \leqslant z'z''$

D13

C'est la raison pour laquelle la relation notée $\leqslant$ ne concerne que les réels.

III) RACINES CARREES ET EQUATIONS DU DEUXIEME DEGRE ; méthode algébrique.
1) Racines carrées.

DEF : z est une racine carrée de $Z \Longleftrightarrow Z = z^2$.
TH : On pose $Z = X + iY$ et $z = x + iy$; alors :

$$z \text{ est une racine carrée de } Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = |Z| \\ x^2-y^2 = X \\ xy \text{ est du signe de } Y \end{cases}$$

Les deux racines carrées de Z sont donc

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}} + i\ \text{signe}\,(Y)\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}-X}{2}}\right)$$

D14

REM : puisqu'il y a deux racines carrées, NE JAMAIS ÉCRIRE $\sqrt{Z}$, sauf si Z est réel $\geqslant 0$; voici ce qui peut arriver si vous le faites :

$$-1 = i.i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

2) Application à la résolution de l'équation du deuxième degré à coefficients complexes.

a) *Forme canonique* de $az^2 + bz + c$.

PROP : si $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminant)

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = \frac{1}{4a}\left((2az+b)^2 - \Delta\right)$$

D15

b) Résolution de $az^2 + bz + c = 0$.

PROP : si $a \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède toujours deux solutions, confondues si $\Delta = 0$:

$$\boxed{\frac{-b \pm \delta}{2a} \text{ où } \delta \text{ est l'une des racines carrées de } \Delta}$$

D16

REM : si $b = 2b'$, alors $\Delta' = \dfrac{\Delta}{4} = b'^2 - ac$ est appelé le discriminant réduit et les solutions s'écrivent :

$$\boxed{\frac{-b' \pm \delta'}{a} \text{ où } \delta' \text{ est l'une des racines carrées de } \Delta'}$$

TOUJOURS UTILISER LE DISCRIMINANT RÉDUIT lorsque 2 se factorise dans b de façon apparente.

E2 : $z^2 - (2+2i)z + 1 = 0$

IV) NOTATION EXPONENTIELLE.

1) Formule de Moivre et formule d'Euler.

PROP : formule de Moivre : si $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$, alors

$$f(\theta + \theta') = f(\theta) f(\theta')$$

Cette propriété, similaire à celle de la fonction exponentielle, justifie (partiellement) le fait que l'on pose :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Ceci n'est actuellement qu'une notation, et le lien avec la fonction exponentielle ne sera vu que plus tard.
La formule de Moivre devient alors :

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

On en déduit, pour tout entier relatif n :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

D17

PROPRIÉTÉS :

$e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$; $e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
$\overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta' = \theta \mod 2\pi$
u est de module 1 $\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}$ / $u = e^{i\theta}$

et on a les formules d'Euler :

$\cos\theta = \operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$
$\sin\theta = \operatorname{Im}\left(e^{i\theta}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

D18

2) Applications à la trigonométrie.

a) Linéarisation.

On applique les formules d'Euler, puis on développe en utilisant la formule de Moivre, et on revient en sin et cos avec les formules d'Euler.

Exemples : E1

b) Mise sous forme de polynôme en cos et sin (appelé "polynôme trigonométrique")

PROP : On a les développements :

$\cos n\theta = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k} (\cos\theta)^{n-2k} \left(1 - \cos^2\theta\right)^k$
$\sin n\theta = \sin\theta \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k+1} (\cos\theta)^{n-2k-1} \left(1 - \cos^2\theta\right)^k$

D19

Ce qui donne, en posant pour tout réel x :

$T_n(x) = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k} \left(1 - x^2\right)^k$
$U_{n-1}(x) = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1} \left(1 - x^2\right)^k$

les formules :

$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$
$\sin n\theta = \sin\theta U_{n-1}(\cos\theta)$

Les polynômes T_n et U_{n-1} sont les polynômes de Tchebychev de première et seconde espèce.

c) Factorisation de $e^{ia} \pm e^{ib}$

PROP :

$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\dfrac{a-b}{2}\ e^{i\frac{a+b}{2}}$
$e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\dfrac{a-b}{2}\ e^{i\frac{a+b}{2}}$

D20

d) Calcul de $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(\theta + k\varphi)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(\theta + k\varphi)$

REM : cf. ex. 2 sur les fonctions circulaires pour une méthode sans complexe.

PROP : si $\varphi \neq 0 \mod 2\pi$

$$C_n = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} \cos\left(\theta + \frac{n}{2}\varphi\right)$$

$$S_n = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} \sin\left(\theta + \frac{n}{2}\varphi\right)$$

D21

V) INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE ; ARGUMENT.

1) Interprétation géométrique.

On a les correspondances suivantes (P est un plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et $\overrightarrow{P}$ l'ensemble des vecteurs du plan) :

$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}^2$	P	$\overrightarrow{P}$
$z = x + iy$	(x, y)	$M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$	$x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$
$z + z'$	$(x + x', y + y')$		$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}'$
$\lvert z\rvert$	$\sqrt{x^2 + y^2}$	OM	$\lVert\overrightarrow{u}\rVert$
$\lvert z' - z\rvert$	....	....	....

On dit que z est l'*affixe* de M et de $\overrightarrow{u}$, ce qui s'écrit $M(z)$ et $\overrightarrow{u}(z)$; M est le *point-image* de z et $\overrightarrow{u}$ son *vecteur-image*.

Application 1 : si $A(a)$ et $B(b)$, $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe ....

Application 2 : équation complexe du cercle (C) de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon R :

$M(z) \in (C) \Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow$ ....

2) Argument d'un nombre complexe non nul.

DEF : si M est un point d'affixe $z \neq 0$, on appelle *argument* de z toute mesure en radians de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}}\right)$; notation $\arg z$.

REM 1 : cette notation $\arg z$ est pratique mais abusive dans la mesure où elle ne représente pas un seul réel, mais une infinité, différant d'un multiple de 2π ; on écrit ceci sous la forme :

$$\arg z = \theta \mod 2\pi$$

CNS : si $z \neq 0$

$$\arg z = \theta \mod 2\pi \Leftrightarrow e^{i\theta} = \frac{z}{|z|} \Leftrightarrow z = |z|\, e^{i\theta}$$

D22

PROPRIÉTÉS : avec $zz' \neq 0, A(a), B(b), C(c), D(d)$ ($A \neq B$ et $C \neq D$),

$\arg(zz') =$ .... $\mod 2\pi$
$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) =$ .... $\mod 2\pi$
$\arg(\overline{z}) =$ .... $\mod 2\pi$
z est réel $\Leftrightarrow \arg z = 0 \mod \pi$
z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} \mod \pi$
$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \mod 2\pi$ et $(\widehat{(AB), (CD)}) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \mod \pi$
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = 0 \mod \pi$
Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ssi $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2} \mod \pi$

D23

3) Coordonnées polaires d'un point et forme trigonométrique d'un complexe.

PROP : $(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2$ est un couple de *coordonnées polaires* de M d'affixe z ssi

$$\rho e^{i\theta}=z$$

L'écriture $\rho e^{i\theta}$ est appelée une forme *trigonométrique* (ou *exponentielle*, ou *polaire*) du complexe z.

ATTENTION :
REM 1 : ici ρ n'est pas forcément supposé $\geqslant 0$; il vaut donc $\pm|z|$ et

$$\rho e^{i\theta}=z\Leftrightarrow\begin{cases}\text{si } \rho>0: \ |z|=\rho \text{ et } \arg z=\theta \mod 2\pi\\ \text{si } \rho<0: \ |z|=\text{........et } \arg z=\text{................} \mod 2\pi \ :\\ \text{si } \rho=0: \ z=0\end{cases}$$

D24

REM 2 : l'expression $2\cos\dfrac{a-b}{2}e^{i\frac{a+b}{2}}$ constitue une forme exponentielle de $e^{ia}+e^{ib}$.

4) Interprétation géométrique de la multiplication des complexes.

(R)appel : la composée de l'homothétie de centre Ω et de rapport λ avec la rotation de même centre et d'angle α est appelée la *similitude directe* de centre Ω de rapport λ et d'angle α.

PROP : multiplier un complexe par le complexe $\lambda e^{i\alpha}$ revient à faire subir à son point image une similitude directe de centre O de rapport λ et d'angle α.
D25

APPLICATION :
1. Si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la similitude directe de centre $\Omega(\omega)$ de rapport λ et d'angle α, on a :

$$z'-\omega=\lambda e^{i\alpha}(z-\omega)$$

2. Si a et b sont deux complexes, la transformation du plan

$$M(z)\mapsto M'(z') \text{ avec } z'=az+b$$

est
- soit la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(b)$ si $a=1$.
- soit la similitude directe de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ de rapport $|a|$ d'angle $\arg a$ si $a\neq 1$.

C'est une homothétie ssi a est réel, et une rotation ssi a est de module 1.
D26

VI) RACINES n-IÈMES DES NOMBRES COMPLEXES.

1) Définition et premières remarque.

DEF : si z et $Z\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$

$$z \text{ est une } \textit{racine } n-\textit{ième} \text{ de } Z \text{ si } z^n=Z$$

REM 1 : pour $n\geqslant 1$, 0 a une et une seule racine n-ième : lui-même.

REM 2 : si n est pair et z est une racine $n-$ième de Z, alors $-z$ également.

REM 3 : si $n=pq$ avec $p,q\in\mathbb{N}$, les racines $n-$ièmes de Z en sont les racines $p-$ièmes des racines $q-$ièmes.

REM 4 : les racines $n-$ièmes du conjugué de Z sont les conjugués des racines $n-$ièmes de Z.

REM 5 : si z_0 est l'une des racines $n-$ièmes de $Z \neq 0$, on obtient toutes les autres en multipliant z_0 par les racines $n-$ièmes du nombre 1 (que l'on nomme traditionnellement : racines $n-$ièmes "de l'unité").
D27

2) Résolution à l'aide de la forme exponentielle.

TH : si $Z \neq 0$ est de module R et d'argument Θ, z possède exactement n racines $n-$ièmes distinctes de même module égal à $\sqrt[n]{R}$ et d'argument

$$\frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in [|0, n-1|]$$

D28

REM 1 : les points-images de ces racines forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{R}$; on en déduit que la somme des racines $n-$ièmes d'un complexe est nulle.

REM 2 : puisqu'il y n racines n-ièmes, ON N'ECRIT JAMAIS DANS UN CALCUL $\sqrt[n]{Z}$ sauf si Z est réel $\geqslant 0$.

Eventuellement, on peut par contre considérer que l'écriture $\sqrt[n]{Z}^{\mathbb{C}}$ représente L'ENSEMBLE des n racines n-ièmes complexes de Z (notation non classique).

Exemples E3 : $\sqrt{1}^{\mathbb{C}} = \{1, -1\}$, $\sqrt{-1}^{\mathbb{C}} = \{i, -i\}$, et déterminer de même les ensembles
$\sqrt{i}^{\mathbb{C}}, \sqrt{1+i}^{\mathbb{C}}, \sqrt[3]{-1}^{\mathbb{C}}, \sqrt[4]{-1}^{\mathbb{C}}, \sqrt[6]{-1}^{\mathbb{C}}$.

- construire graphiquement les 8 racines huitième de $(-3+4i)/5$.
- déterminer une valeur approchée d'une racine cinquième de $-2+3i$ à l'aide d'une machine à calculer.
- calculer $(2+i)^3$ et en déduire l'ensemble $\sqrt[3]{2+11i}^{\mathbb{C}}$.

3) Groupe des racines $n-$ièmes de l'unité.

Remarque préalable : l'inverse, le conjugué, le produit de racines $n-$ièmes de l'unité est encore une racine $n-$ième de l'unité.
D29

On verra plus tard que cela implique que l'ensemble $U_n = \sqrt[n]{1}^{\mathbb{C}}$ de ces racines forme un groupe multiplicatif ; on a :

$U_1 = \{1\}, U_2 = \{1, -1\}, U_3 = \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}\}$; si l'on pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, alors $U_3 = \{1, j, j^2\}$ et l'on a :

$j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (forme à utiliser le moins possible)
$j^2 = \overline{j} = \dfrac{1}{j}$
$1 + j + j^2 = 0$

$U_4 = \{................................\}, U_6 = \{..\}$

Et si $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $U_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\} = \{1, u, u^2, ..., u^{n-1}\}$

Et comme $u^{n-k} = \overline{u}^k$ on peut écrire :

$$U_n = \left| \begin{array}{l} \{1, u, \overline{u}, u^2, \overline{u}^2, ..., u^p, \overline{u}^p\} \text{ si } n = 2p+1 \\ \{1, ...\} \text{ si } n = 2p \end{array} \right.$$

D30

VII) ÉPILOGUE : RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE BOMBELLI DANS $\mathbb{C}$.
D31