Corrigé de l'Examen de Programmation Linéaire

Exercice 1 (**6 points**) Considérons le problème linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 - 3x_2 \geq -6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad (1)$$

Résoudre le problème (1) en identifiant à chaque itération la matrice basique et la matrice basique inverse.

Corrigé de l'exercice 1 Le problème (1) sous forme standard est :

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ & -2x_1 + 3x_2 + x_5 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} \quad (2)$$

La solution $x = (0, 0, 3, 5, 6)$ est une solution réalisable basique initiale du problème (2).

Itération 1.

		c	2	3	0	0	0	
		x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
c_b^T	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ
0	a_3	3	1	-2	1	0	0	/
0	a_4	5	2	1	0	1	0	5
0	a_5	6	-2	3	0	0	1	2 →
Z=0		E	-2	-3 ↑	0	0	0	

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Itération 2. (avec la nouvvelle base $\{a_3, a_4, a_2\}$)

		c	2	3	0	0	0	
		x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
c_b^T	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ
0	a_3	7	-1/3	0	1	0	2/3	/
0	a_4	3	8/3	0	0	1	-1/3	9/8 →
3	a_2	2	-2/3	1	0	0	1/3	/
Z=6		E	-4 ↑	0	0	0	1	

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Itération 3. (avec la nouvvelle base $\{a_3, a_1, a_2\}$

		c	2	3	0	0	0
		x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c_b^T	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_3	59/8	0	0	1	1/8	5/8
2	a_1	9/8	1	0	0	3/8	-1/8
3	a_2	22/8	0	1	0	2/8	2/8
Z=21/2		E	0	0	0	12/8	4/8

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 5/8 \\ 0 & 3/8 & -1/8 \\ 0 & 2/8 & 2/8 \end{pmatrix}$$

Le critère d'optimalité est vérifié, la solution courante $x^* = (\frac{9}{8}, \frac{22}{8})$ est optimale et la fonction objectif a pour valeur $z^* = 21/2$.

Exercice 2 (**5 points**) Considérons le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

1. Détetminer les solutions basiques et les points extrêmes du système (S).
2. Calculer sur (S) le minimum de la fonction

$$z = -3x_1 - 2x_2 - x_3$$

Corrigé de l'exercice 2

1. Le Système (S) possède les 3 solutions basiques suivantes :

$$\{(2, -10), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$$

   et les 2 points extremes suivants :

$$\{(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$$

2. Le Minimum sur (S) de la fonction z est atteint au point $x^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, où $z(x^*) = -2$

Exercice 3 (**5 points**) Résoudre graphiquement le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 - 3x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \tag{4}$$

Confirmer votre résultat par la méthode des deux phases.

Corrigé de l'exercice 3

1. Résolution Graphique : Le point optimal du problème (4) comme le montre la figure (1) est le point $x^* = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ et la valeur de l'objectif est $z = -\frac{7}{3}$.
2. Méthode des deux phases : La forme standard du problème (4) est donnée par :

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 - 3x_2 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ & x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \tag{5}$$

   Le problème auxiliaire associé au problème (5) s'ecrit :

$$\begin{array}{ll} \max & -x_4 - x_5 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \quad = 3 \\ & x_1 - x_2 \qquad\qquad + x_5 = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1 \ldots 5 \end{array} \tag{6}$$

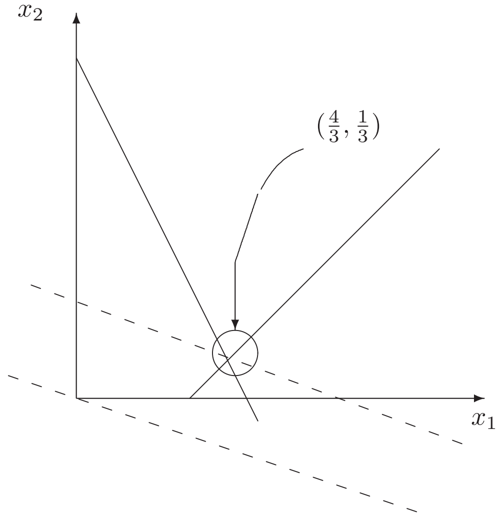

Fig. 1 – Résolution graphique

Phase I

Itération 1

		c	0	0	0	-1	-1		
		x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
c_b^T	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ	
-1	a_4	3	2	1	-1	1	0	3/2	
-1	a_5	1	1	-1	0	0	1	1	$\rightarrow$
z=-4		E	-3	0	1	0	0		
			$\uparrow$						

Itération 2

		c	0	0	0	-1	-1		
		x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
c_b^T	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ	
-1	a_4	1	0	3	-1	1	-2	1/3	$\rightarrow$
0	a_1	1	1	-1	0	0	1	/	
z=-1		E	0	-3	1	0	3		
				$\uparrow$					

Itération 3

		c	0	0	0	-1	-1
		x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c_b^T	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_2	1/3	0	1	-1/3	1/3	-2/3
0	a_1	4/3	1	0	-1/3	1/3	1/3
z=0		E	0	0	0	1	1

Le critère d'optimalité étant vérifié, la solution courante $x = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ est optimale pour le problème (6). On utilise ainsi cette solution comme solution de base réalisable initiale pour résoudre le problème (5).

Phase II

Itération 1

		c	-1	-3	0
		x	x_1	x_2	x_3
c_b^T	Base	b	a_1	a_2	a_3
-3	a_2	1/3	0	1	-1/3
-1	a_1	4/3	1	0	-1/3
z=-7/3		E	0	0	4/3

Le critère d'optimalité ést vérifié, la solution $x^* = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ est optimale pour le problème (4), avec $z^* = -7/3$.

Exercice 4 (**4 points**) Résoudre par la méthode du Big-M le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - 4x_2 \\ & 2x_1 - 2x_2 = 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \tag{7}$$

Corrigé de l'exercice 4 La forme standard associée au problème (7) est :

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - 4x_2 \\ & 2x_1 - 2x_2 \qquad = 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \tag{8}$$

Le M-problème auxiliaire associé au problème (8) s'ecrit :

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - 4x_2 - Mx_4 - Mx_5 \\ & 2x_1 - 2x_2 \qquad = 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ & x_i \geq 0, i = 1 \dots 5 \end{array} \tag{9}$$

itération 1

		c	-2	-4	0	-M	-M		
		x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
c_b^T	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ	
-M	a_4	4	2	-2	0	1	0	2	
-M	a_5	6	4	2	-1	0	1	3/2	$\rightarrow$
Z=-10 M		E	-6 M + 2	4	M	0	0		
			$\uparrow$						

itération 2

		c	-2	-4	0	-M	-M		
		x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
c_b^T	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ	
-M	a_4	1	0	-3	1/2	1	-1/2	2	$\rightarrow$
-2	a_1	3/2	1	1/2	-1/4	0	1/4	/	
Z=-M-1		E	0	3M+3	-M/2 +1/2	0	3M/2 -1/2		
					$\uparrow$				

itération 3

		c	-2	-4	0	-M	-M
		x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c_b^T	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_3	2	0	-6	1	2	-1
-2	a_1	2	1	-1	0	1/2	0
Z=-4		E	0	6	0	M-1	M

Le critère d'optimalité ést vérifié, la solution $x^* = (2, 0)$ est optimale pour le problème (7), avec $z^* = -4$.

$\mathcal{N}$. Khimoum.