1. Cours 1: Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

2. Cours 2: Fonctions et Applications

3. Cours 3: Relations

3.1. Notion de relation:

3.1.1 Définitions:

On appelle relation d'un ensemble A vers un ensemble B, toute correpondance $\mathcal{R}$, qui lie d'une certaine façon des éléments de A à des des éléments de B.

**On dit que A est l'ensemble de départ ou la source et que B est l'ensemble d'arrivée ou le but de la relation$\mathcal{R}$*

**Si l'élément x de A et l'élément y de B sont liés par la relation $\mathcal{R}$, on dit que x est en relation $\mathcal{R}$ avec y ou (x, y) vérifie la relation $\mathcal{R}$ et on écrit: $x\mathcal{R}y$ ou $\mathcal{R}(x, y)$*

**Une relation de A vers A est dite relation sur A*

Exemple 1: La correspondance $\mathcal{R}_1$ qui lie les entiers à leurs multiples est une relation sur Z, qui est appelée relation de divisibilité et notée $\mathcal{R}_d$.

On a dans ce cas $1\mathcal{R}_1x$ et $x\mathcal{R}_10$ pour tout x dans Z.

Exemple 2: La correspondance $\mathcal{R}_2$ qui lie les chiffres aux voyelles utilisées pour écrire le chiffre en toutes lettres, est une relation de l'ensemble

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ vers l'ensemble $\{a, e, i, o, u, y\}$

On a dans ce cas $0\mathcal{R}_2e$, $0\mathcal{R}_2o, 0\not{\mathcal{R}}a$, $9\not{\mathcal{R}}y$, $6\mathcal{R}_2i$ et $1\mathcal{R}_2u$

Exemple 3: La correspondance $\mathcal{R}_3$ qui lie les nombres réels ayant les mêmes carrés est une relation sur $\mathbb{R}$.

On a dans ce cas $1\mathcal{R}_31$ et $2\mathcal{R}_3(-2)$.

3.1.2 Définitions: (Graphe d'un ensemble): *Soit* $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble A vers un ensemble B.

1) Si $A_0 \subset A$, on appelle graphe de A_0 par $\mathcal{R}$ et on note $G_{\mathcal{R}}(A_0)$, le sous ensemble de $A \times B$ formé des couples (x, y) tels que $x \in A_0$ et $x\mathcal{R}y$

C.à.d:

$$G_{\mathcal{R}}(A_0) = \{(x, y) \in A \times B \ / \ x \in A_0 \text{ et } x\mathcal{R}y\}$$

*$G_{\mathcal{R}}(A)$ *est appelé graphe de $\mathcal{R}$ et est noté $G_{\mathcal{R}}$. (c'est le cas $A_0 = A$)*

Exemple 1: Reprenons la relation $\mathcal{R}_1$ donnée par l'exemple 1 précédent, alors: $G_{\mathcal{R}_1} = \{(x,y) \in Z^2 \ / \ x \text{ divise } y\}$,par exemple $(3,-21) \in G_{\mathcal{R}_1}$ et $(3,20) \notin G_{\mathcal{R}_1}$

Exemple 2: Si on reprend la relation $\mathcal{R}_2$ donnée par l'exemple 2 précédent, on aura: $G_{\mathcal{R}_2} = \{ (0,e), (0,o), (1,u), (2,e), (2,u), (3,o), (3,i), (4,u), (4,a), (4,e), (5,i), (6,i), (7,e), (8,u), (8,i), (9,e), (9,u)\}$

Exemple 3: Pour l'exemple 3 précédent le graphe $G_{\mathcal{R}_3}$ est le suivant: $G_{\mathcal{R}_3} = \{(x,-x), (x,x) \ / \ x \in R\}$

3.1.2.1 Remarque: Une relation $\mathcal{R}$ est entièrement définie par la donnée de son graphe, la raison pour laquelle, on identifie une relation à son graphe. Alors deux relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$sont égales, si elles ont le même graphe.

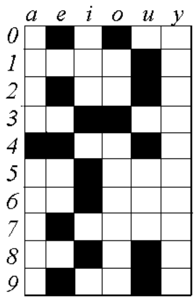
C.à.d: $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ ssi $G_{\mathcal{R}} = G_{\mathcal{R}'}$

3.1.3 Représentations des relations: La représentations d'une relation $\mathcal{R}$ d'un ensemble A vers un ensemble B dépend de la nature des ensembles A et B.

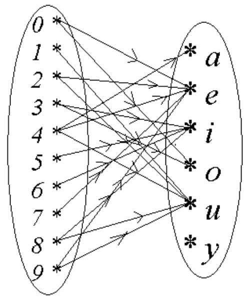
Les représentations les plus utilisées sont les suivantes:

1) *Représentation au moyen d'un tableau ou d'une matrice binaire ou d'un diagramme sagittal (*utile dans le cas où A et B sont finis*).*

Exemple: La relation $\mathcal{R}_2$ donnée par l'exemple 2 précédent peut être représentée par les trois façons suivantes:



$$\begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & e & i & o & u & v \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

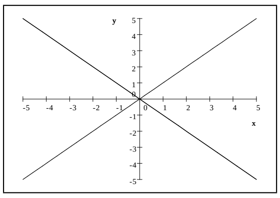


2) *Représentation au moyen d'une formule.*

Exemple: Soit la relation $\mathcal{R}_3$ sur $\mathbb{R}$ telle que: $x\mathcal{R}_3 y$ ssi $x^2 = y^2$

3) *Représentation au moyen d'un graphe.*

Exemple: La relation $\mathcal{R}_3$ donnée par l'exemple précédent peut être donnée par le graphe suivant:



3.1.4 Relations sur un ensemble:

3.1.4.1 Définitions: *Une relation $\mathcal{R}$ sue un ensemble A est dite:*

1) Réflexive, si pour tout $x \in A$ on a: $x\mathcal{R}x$.

2) Symétrique, si pour tous $x, y \in A$ on a: $x\mathcal{R}y$ implique $y\mathcal{R}x$.

3) Antisymerique, si pour tous $x, y \in A$ on a: ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$) implique $x = y$.

4) Transitive, si pour tous $x, y, z \in A$ on a: ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$) implique $x\mathcal{R}z$.

Exemple 1: Soit la relation $\mathcal{R}_1$ définie sur $\mathbb{Z}$ par $x\mathcal{R}_1 y$ ssi x divise y

* $\mathcal{R}_1$ est réflexive car tout entier x ona x divise x (même 0)

* $\mathcal{R}_1$ n'est pas symétrique car x divise y n'implique pas toujours y divise x , on 1 divise 4 mais 4 ne divise pas 1

* $\mathcal{R}_1$ n'est pas antisymétrique car x divise y et y divise x n'implique pas nécessairement $x = y$, on 1 divise -1 et -1 divise 1, mais $1 \neq -1$

* $\mathcal{R}_1$ est transitive car x divise y et y divise z implique nécessairement x divise z

Exemple 2: La relation $\mathcal{R}_3$ donnée sur $\mathbb{R}$ par la formule $x\mathcal{R}_2 y$ ssi $x^2 = y^2$ est réflexive ($x^2 = x^2$), symétrique ($x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = x^2$), non antisymétrique (($x^2 = y^2$ et $y^2 = x^2) \nRightarrow x = y$) et transitive (($x^2 = y^2$et $y^2 = z^2) \Rightarrow x^2 = z^2$).

Exemple 3: Sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$, on définit la relation $\mathcal{R}'$ donnée $X\mathcal{R}'Y$ ssi $X \subset Y$, appelée relation d'inclusion. Cette relation est reflexive non symétrique, antisymétrique et transitive.

Exemple 4: Soit la relation $\mathcal{R}''$ définie sur $\mathbb{Z}$ par $x\mathcal{R}''y$ ssi $x - y$ est impair.

$\mathcal{R}''$ n'est ni réflexive ($x - x$ n'est pas impair) ni antisymétrique ($6 - 1$ et $1 - 6$ sont impairs, mais $1 \neq 6$) ni transitive ($7-4$ et $4-1$ sont impairs, mais $7-1$ n'est pas impair), mais elle est symétrique (($x - y$ est impair)$\Rightarrow$ ($y - x$ est impair)).

3.1.4.2 Remarque: Il ne faut pas croire q'une relation antisymétrique est une relation non symétrique. (L'exemple 1 donne une relation non symétrique et non antisymétrique)

3.1.4.3 Relation d'équivalence, classes d'équivalence et ensemble quotient:

1) Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble A, est dite relation d'équivalence, si elle est réflexive, symétrique et transitive.

2) L'ensemble des éléments de A qui sont en relation d'équivalence $\mathcal{R}$ avec un élément $a \in A$ est appelé classe d'équivalence de a modulo $\mathcal{R}$ et est noté $\overset{\bullet}{a}$.

C.à.d: $\overset{\bullet}{a} = \{x \in A \ / \ x\mathcal{R}a\}$

3) L'ensemble des classes d'équivalence de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur A est appelé l'ensemble quotient de A par $\mathcal{R}$ et est noté $A_{/\mathcal{R}}$

C.à.d: $A_{/\mathcal{R}} = \left\{ \overset{\bullet}{a} \ / \ a \in A \right\}$

Exemple 1: La relation $\mathcal{R}_3$ donnée sur $\mathbb{R}$ par la formule $x\mathcal{R}_2 y$ ssi $x^2 = y^2$ est une relation d'équivalence, et $\overset{\bullet}{0} = \{0\}$ et pour $a \neq 0$, on a: $\overset{\bullet}{a} = \{a, -a\}$

$\mathbb{R}_{/\mathcal{R}_3} = \{\{0\}, \{a, -a\} \ / \ a > 0\}$ qui peut être identifié à $\mathbb{R}^+$

Exemple 2: Soit $\mathcal{R}_n$ la relation de congruence[1] modulo n définie sur $\mathbb{Z}$ par: $x\mathcal{R}_n y$ ssi n divise $y - x$, est bien une relation d'équivalence.

(n divise $x - x$; (n divise $y - x$) $\Rightarrow$ (n divise $x - y$) ;
(n divise $y - x$ et n divise $z - y$) $\Rightarrow$ (n divise $(z - y) + (y - x) = z - x$))

Pour cette relation on a: $\overset{\bullet}{a} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ n \text{ divise } x - a\}$
$= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x = nq + a, \ \ q \in \mathbb{Z}\}$ noté $n\mathbb{Z} + a$

Dans ce cas $\mathbb{Z}_{/\mathcal{R}_n} = \{n\mathbb{Z} + a \ / \ a \in \mathbb{Z}\}$ qui est souvent noté $\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$

3.1.4.4 Remarques: 1) La classe $\overset{\bullet}{a}$ est assi noté $\bar{a}$, $[a]$ et $Cl(a)$.

2) Si x est en relation d'équivalence avec y, on dit que x et y sont équivalents.

3.1.4.5 Théorème: *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble non vide A, alors*

1) Tout élément de A est dans une classe d'équivalence. C.à.d $A = \underset{a \in A}{\cup} \overset{\bullet}{a}$.

2) Deux éléments sont équivalents si et seulement, s'ils ont la même classe. C.à.d Pour tous $a, x \in A : a\mathcal{R}x$ *ssi* $\overset{\bullet}{a} = \overset{\bullet}{x}$

3) Deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues. C.à.d:Pour tous $a, x \in A : \overset{\bullet}{a} \cap \overset{\bullet}{x} = \varnothing$ *ou* $\overset{\bullet}{a} = \overset{\bullet}{x}$

4) Les classes d'équivalence forment une partition de A.

.

Preuve: 1) Tout élément a de A vérifie $a\mathcal{R}a$, alors $a \in \overset{\bullet}{a}$.

[1] La notion de relation de congruence est déjà donnée dans le **cours 1**

2) Supposons que $a\mathcal{R}x$ et soit $z \in \overset{\bullet}{a}$, alors $z\mathcal{R}a$ et par transitivité $z\mathcal{R}a$, donc $z \in \overset{\bullet}{x}$, d'où l'inclusion $\overset{\bullet}{a} \subset \overset{\bullet}{x}$. De façon analogue on obtient l'inclusion $\overset{\bullet}{x} \subset \overset{\bullet}{a}$.

Inversement, si $\overset{\bullet}{a} = \overset{\bullet}{x}$, on prend un élément $z \in \overset{\bullet}{a} = \overset{\bullet}{x}$, qui vérifie $a\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{R}x$ et par transitivité on obtient $a\mathcal{R}x$

3) Supposons le contraire C.à.d $\overset{\bullet}{a} \cap \overset{\bullet}{x} \neq \varnothing$ et $\overset{\bullet}{a} \neq \overset{\bullet}{x}$, alors il existe $z \in A$ vérifiant $a\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{R}x$, alors $a\mathcal{R}x$, et d'après 2), on conclut que $\overset{\bullet}{a} = \overset{\bullet}{x}$ ce qui est en contradiction avec $\overset{\bullet}{a} \neq \overset{\bullet}{x}$.

4) D'après 1), on a $\overset{\bullet}{a} \neq \varnothing$ et $A = \underset{a\in A}{\cup} \overset{\bullet}{a}$, et d'après 3) $\overset{\bullet}{a} \cap \overset{\bullet}{b} = \varnothing$ si $\overset{\bullet}{a} \neq \overset{\bullet}{b}$, par conséquent les classes d'équivalences forment une partition de A. ■

Exemple : Si $n = 3$, on $\mathbb{Z}_{/3\mathbb{Z}} = \left\{\overset{\bullet}{0}, \overset{\bullet}{1}, \overset{\bullet}{2}\right\} = \left\{\overset{\bullet}{3}, \overset{\bullet}{1}, \overset{\bullet}{2}\right\} = \left\{\overset{\bullet}{(-3)}, \overset{\bullet}{4}, \overset{\bullet}{(23)}\right\}$
.

3.1.4.6 Relation d'ordre:

1) Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble A, est dite relation d'ordre, si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Pour rapprler q'il s'agit d'une relation d'ordre, on écrit souvent $\leq_{\mathcal{R}}$ au lieu de $\mathcal{R}$.

2) Deux éléments de A qui sont en relation d'ordre $\leq_{\mathcal{R}}$ sont dits comparables par $\leq_{\mathcal{R}}$. C.à.d: x et y sont comparables par $\leq_{\mathcal{R}}$, si $x \leq_{\mathcal{R}} y$ ou $y \leq_{\mathcal{R}} x$

3) Une relation d'ordre $\leq_{\mathcal{R}}$ sur un ensemble A, est dite relation d'ordre total, si tous les éléments de A sont deux à deux comparables, sinon elle est dite relation d'ordre partiel. C.à.d:

$\leq_{\mathcal{R}}$ est dite relation d'ordre total, si, pour tous $x, y \in A$, on a *$x \leq_{\mathcal{R}} y$ ou $y \leq_{\mathcal{R}} x$*

$\mathcal{R}$ est dite relation d'ordre partiel, s'ils existent $x, y \in A$, tels que $x \nleq_{\mathcal{R}} y$ et $y \nleq_{\mathcal{R}} x$

Exemple 1: La relation d'inclusion $\mathcal{R}'$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est une relation d'ordre partiel.

($X \subset X$; ($X \subset Y$ et $Y \subset X$) $\Rightarrow X = Y$; ($X \subset Y$ et $Y \subset Z$) $\Rightarrow X = Z$ de plus les parties $\{1, 2\}$ et $\{1, 3\}$ sont incomparables)

Exemple 2: La relation de divisibilité n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$, (car elle est non antisymétrique), mais elle devient une relaion d'ordere partiel si on se restrient à $\mathbb{N}$ et on la note dans ce cas $\leq_d$.

(($b = qa$ et $a = q'b$)$\Rightarrow$($b = qq'b$ et $a = q'b$), alors ou bien a et b sont nuls, ou bien $qq' = 1$ et puisqu'on est dans $\mathbb{N}$, alors $q = q' = 1$ et dans les deux cas $a = b$.)

Exemple 3: La façon avec laquelle sont rangés les mots dans un dictoinnaire définie une relation d'ordre total appelée **ordre lexicographique** et noté $\leq_{lex}$. On a par exemple *algèbre* $\leq_{lex}$ *analyse.*

3.1.4.7 Eléments particuliers: *Soit* $\leq_{\mathcal{R}}$*une relation d'ordre sur un ensemble* A *(On dit que* $(A, \leq_{\mathcal{R}})$ *est un ensemble ordonné), et soit* A_0 *une partie de* A

1) L'élément m *est appelé minimum de* A_0 *et noté* $\min A_0$*, si*

$$m \in A_0 \textit{ et pour tout } a \in A_0 : m \leq_{\mathcal{R}} a.$$

2) Lélément M *est appelé maximum de* A_0 *et noté* $\max A_0$*, si*

$$m \in A_0 \textit{ et pour tout } a \in A_0 : a \leq_{\mathcal{R}} m.$$

3) Un élément m *est appelé minimal de* A_0 *, si*

$$m \in A_0 \textit{ et pour tout } a \in A_0 : a \leq_{\mathcal{R}} m \text{ implique } a = m.$$

4) Un élément M *est appelé maximal de* A_0 *, si*

$$M \in A_0 \textit{ et pour tout } a \in A_0 : M \leq_{\mathcal{R}} a \text{ implique } a = M.$$

5) Un élément m *est appelé minorant* A_0 *, si*

$$\textit{pour tout } a \in A_0 : m \leq_{\mathcal{R}} a.$$

Le maximum des minorants de A_0*, s'il existe, est appelé la borne inférieure de* A_0 *et est noté* $\inf A_0$

6) Un élément M *est appelé majorant* A_0 *, si*

$$\textit{pour tout } a \in A_0 : a \leq_{\mathcal{R}} M.$$

Le minimum des majorants de A_0*, s'il existe, est appelé la borne superieure de* A_0 *et est noté* $\sup A_0$

Exemple 1: Pour l'ordre de divisibilté $\leq_d$ sur $\mathbb{N}$, soit $A_0 = \{1, 3, 7\}$,on a:
$\min A_0 = 1$ ($1 \in A_0$ et $\forall a \in A_0 : 1$ divise a)
$\max A_0$ n'existe pas (Aucun élément de A_0 n'est divisible par $1, 3$ et 7)

1 est le seul élément minimal de A_0.
3 et 7 sont les seuls éléments maximaux de A_0
Il y a un seul minorant de A_0 qui est 1 alors $\inf A_0 = 1$
Les majorants de A_0 sont les éléments M tels que 1, 3 et 7 divise M, donc les majorants de A_0 sont $0, 21, 42, ..., 21q, ...$ et leurs minimum relativement à la relation $\leq_d$ est bien 21, ainsi $\sup A_0 = 21$

(Attention 0 est plus grand que 21 pour l'ordre de divisibilité $\leq_d$)

Exemple 2: Pour l'ordre usuel $\leq$ sur $\mathbb{R}$, soit $B =]-4, 0[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$,on a:
$\min B$ n'existe pas (-4 est un bon candidat, mais $-4 \notin B$)
$\max B$ n'existe pas (Il n'y a aucun candidat)
Aucun élément n'est minimal de B.
Aucun élément n'est maximal de B
L'ensemble des minorants de B est $]-\infty, -4]$ alors $\inf B = -4$
Il n'y a aucun majorant de B, donc $\sup B$ n'existe pas.

.

3.1.4.8 Théorème: *Soient $\leq_{\mathcal{R}}$ une relation d'ordre sur un ensemble A. Alors:*

1) Le minimum, s'il existe, il est unique.

2) Le maximum, s'il existe, il est unique.

3) La borne inférieure, si elle existe, elle est unique.

4) La borne superieure, si elle existe, elle est unique.

Preuve: Supposons deux minimums m et m' pour la même partie A_0 de A, alors m et m' appartiennent à A_0 et $m \leq_{\mathcal{R}} m'$ et $m' \leq_{\mathcal{R}} m$, et en utilisant l'antisymétrie de $\leq_{\mathcal{R}}$, on conclut que $m = m'$.

La preuve de 2) est analogue à celle de 1).

Pour justifier 3) et 4) il suffit de se rappeler que la borne inférieure est un maximum et la borne superieure un minimum. ■

Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module:Algèbre 1 ($1^{ère}$ Année LMD)

Fiche de T.D N^0 3

Exercice 1: Sur l'ensemble des chiffres $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ on définit la relation binaire qui lie deux éléments s'ils ne son pas premiers entre eux.

1) Représenter cette relation par une matrice binaire et donner son graphe.
2) Cette relation est-elle réflexive? Symétrique? Antisymétrique? Transitive?

Exercice 2: Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y$ ssi $(x-y)(x^2-y)=0$

1) Représenter cette relation son graphe.
2) Cette relation est-elle réflexive? Symétrique? Antisymétrique? Transitive?
3) est-elle une relation d'ordre?

Exercice 3: Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ qui lie deux entiers ayant une somme paire. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et donner $\mathbb{Z}_{/\mathcal{R}}$.

Exercice 4: Soit $\mathcal{R}'$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par $\alpha\mathcal{R}'\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta \in \mathbb{Z}$

Montrer que $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence et que $\mathbb{R}_{/\mathcal{R}'}$ est en bijection avec l'intervalle $[0, 1[$

Exercice 5: Soient $E = \{a, b, c, d\}$, et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, munie de l'ordre de l'inclusion, et $\Gamma = \{\{a, c\}, \{b, c\}\}$.

1) Donner $\min\Gamma$, $\max\Gamma, \inf\Gamma$ et $\sup\Gamma$, s'ils existent.

Exercice 6: Soit E l'ensemble des chiffres. On note par E_a l'ensemble des segments lumineux utilisés pour composer le chiffre a sur un afficheur à cristaux liquides. Sur E on définit la relation $\mathcal{R}$ par: $a\mathcal{R}b$ ssi $E_a \subset E_b$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordere. Est-elle un ordre total?
2) Donner min, max , sup et inf des ensembles E et $\{4, 7\}$

Exercice 7: Déterminer min, max , sup et inf des ensembles suivants relativement à l'ordre usuel.

1) $A = \{3x^2 + 7x - 4 \ / \ x \in \mathbb{R}\}$
2) $B = h(]-2, 1[)$ où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $h(x) = x^2 - x + 1$
3) $C = f^{-1}([-8, 100])$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^3$