1. Cours 1: Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

2. Cours 2: Fonctions et Applications

3. Cours 3: Relations

4. Cours 4: Quelques structures algébriques

5. Cours 5: Homomorphismes de structures algébriques

5.1. Homomorphismes de groupes

5.1.1.Définition: *On appelle homomorphisme (ou morphisme) du groupe* $(G, *)$ *dans le groupe* $(G', *')$, *toute application* $f : G \to G'$ *telle que:*

$$\text{Pour tous } x, y \in G : f(x * y) = f(x) *' f(y)$$

**Un homomorphisme bijectif est appelé isomorphisme.*
**Un homomorphisme de* $(G, *)$ *dans* $(G, *)$ *est appelé endomorphisme de* $(G, *)$
**Un endomomorphisme bijectif est appelé automorphisme.*

Exemple 1: L'application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$ telle que $f(z) = |z|$ est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^*, \cdot)$
$(f(z \cdot z') = |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| = f(z) \cdot f(z'))$
* f n'est pas un isomorphisme de groupes (f n'est pas injective)

Exemple 2: L'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ telle que $g(x) = \cos x + i \sin x$ est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$
$(g(x + y) = \cos(x + y) + i \sin(x + y) = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = g(x) g(y))$
* f n'est pas un isomorphisme de groupes (f n'est ni injective ni surjective)

Exemple 3: L'application $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+}$ telle que $\exp(x) = e^x$ est un isomomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^{*+}, \cdot)$
$(\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x) \exp(y)$ et exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{*+})$

Exemple 4: Pour tout élément a d'un groupe $(G, *)$, L'application $I_a : G \to G$ telle que $I_a(x) = a * x * a^{-1}$ est un automomorphisme du groupe $(G, *)$
$(I_a(x * y) = a * x * y * a^{-1} = a * x * (a * a^{-1}) * y * a^{-1} = I_a(x) * I_a(y)$
$I_a(x) = I_a(x') \Rightarrow a * x * a^{-1} = a * x' * a^{-1}$et en composant à gauche par a^{-1} est à droite par a, on obtient $x = x'$, donc I_a est injective.

$I_a(x) = y \Leftrightarrow a * x * a^{-1} = y \Leftrightarrow x = a^{-1} * y * a$, donc I_a est bijective.

Exemple 5: L'application $h : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ telle que $h(n) = pn$ est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{Z}, +)$

* h n'est pas un automorphisme si $p \neq 1$ et $p \neq -1$

5.1.2.Théorème: *Soit $f : G \to G'$ un homomorphisme du groupe $(G, *)$ dans le groupe $(G', *')$, alors*

1) $f(e) = e'$(e et e' sont respectivement les éléments neutres de G et G')

2) Pour tout $x \in G$: $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

3) $\operatorname{Im} f = f(G)$ est un sous groupe $(G', *')$.

4) $\ker f = f^{-1}\{e'\}$ est un sous groupe de $(G, *)$.

5) f est surjectif si, et seulement, si $\operatorname{Im} f = G'$

6) f est injectif si, et seulement, si $\ker f = \{e\}$

On rappelle (voir **cours 2 déf .2.1.2**) que $\operatorname{Im} f = f(G) = \{f(x) \ / \ x \in G\}$ et $\ker f = f^{-1}\{e'\} = \{x \in G \ / \ f(x) = e'\}$

Preuve: 1) On a
$$\begin{aligned} f(e) &= f(e) *' e' = f(e) *' f(x) *' (f(x))^{-1} \\ &= f(e * x) *' (f(x))^{-1} = f(x) *' (f(x))^{-1} = e' \end{aligned}$$

2) $f(x^{-1}) *' f(x) = f(x^{-1} * x) = f(e) = e'$ et $f(x) *' f(x^{-1}) = f(x * x^{-1}) = f(e) = e'$, alors $(f(x))^{-1} = f(x^{-1})$.

3) On a d'après 1) $f(e) = e'$, alors $e' \in \operatorname{Im} f$

Et si $y, y' \in \operatorname{Im} f$,alors $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Or d'après 2), $y'^{-1} = f(x'^{-1})$, donc $y *' y'^{-1} = f(x) *' f(x'^{-1}) = f(x * x'^{-1})$, d'où $y *' y'^{-1} \in \operatorname{Im} f$, alors, d'après **cours 3 prop 4.1.2.1** , $\operatorname{Im} f$ est un sous groupe de G'.

4) On a d'après 1) $f(e) = e'$, alors $e \in \ker f$

Et si $x, x' \in \ker f$,alors $f(x) = e'$ et $f(x') = e'$. Or d'après 2), $f(x'^{-1}) = (f(x'))^{-1}$, donc $f(x * x'^{-1}) = f(x) *' f(x'^{-1}) = f(x) *' (f(x'))^{-1} = e' *' (e')^{-1} = e'$, d'où $x * x'^{-1} \in \ker f$, alors, d'après **cours 3 prop 4.1.2.1** , $\ker f$ est un sous groupe de G.

5) Cette assertion est exactement l'assertion b) de **cours 2 th 2.2.5.4**

6) Supposons que f est injectif, alors:

$\ker f = \{x \in G \ / \ f(x) = e'\} = \{x \in G \ / \ f(x) = f(e)\} = \{e\}$

Inversement , supposons $\ker f = \{e\}$, alors:

Si $f(x) = f(x')$, alors $e' = f(x) *' (f(x'))^{-1} = f(x) *' f(x'^{-1}) = f(x * x'^{-1})$, d'où $x * x'^{-1} \in \ker f$, donc $x * x'^{-1} = e$ et $x = x * x'^{-1} * x' = x'$, ainsi f est injectif.

■

5.2. Homomorphismes d'anneaux

6.2.1.Définition: *On appelle homomorphisme (ou morphisme) de l'anneau* $(A, +_A, \cdot_A)$ *dans l'anneau* $(B, +_B, \cdot_B)$, *toute application* $f : A \to B$ *telle que:*

$$\text{Pour tous } x, y \in A : f(x +_A y) = f(x) +_B f(y)$$
$$\text{et Pour tous } x, y \in A : f(x \cdot_A y) = f(x) \cdot_B f(y)$$

**Un homomorphisme bijectif est appelé isomorphisme.*

**Un homomorphisme de* $(A, +_A, \cdot_A)$ *dans* $(A, +_A, \cdot_A)$ *est appelé endomorphisme de* $(A, +_A, \cdot_A)$

**Un endomomorphisme bijectif est appelé automorphisme.*

Exemple 1: L'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telle que $f(x) = \dot{x}$ est un homomorphisme d'anneaux.

$(f(x+y) = \dot{\widehat{x+y}} = \dot{x} \dot{+} \dot{y} = f(x) \dot{+} f(y)$ et $f(x \times y) = \dot{\widehat{x \times y}} = \dot{x} \dot{\times} \dot{y} = f(x) \dot{\times} f(y))$

Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module:Algèbre 1 ($1^{ère}$ Année LMD)

Fiche de T.D N^0 5

Exercice 1: Soit $(G,*)$ un groupe. Trouver une condition pour que l'application $f : G \to G$ telle que $f(x) = x^2$ soit un endomorphisme.

Exercice 2: Montrer que $(\mu_n, \times)$ est isomorphe à $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \overset{\bullet}{+}\right)$

$\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = 1\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est l'ensemble des racines $n-ème$ complexes de l'unité 1

Exercice 3: Soit $f : (G,*) \to (G',*')$ un homorphisme de groupes. Soit R la relation définie sur G par xRy ssi $x * y^{-1} \in \ker f$

1) Vérifier que R est une relation d'équivlence. (Notons son ensemble quotient $G/\ker f$)

2) Montrer que $\left(G/\ker f, \overset{\bullet}{*}\right)$ est un groupe où $\overset{\bullet}{x} \overset{\bullet}{*} \overset{\bullet}{y} = \overset{\bullet}{\widehat{x * y}}$.

3) Soit $\overline{f} : \left(G/\ker f, \overset{\bullet}{*}\right) \to (\operatorname{Im} f, *')$ défini par $\overline{f}\left(\overset{\bullet}{x}\right) = f(x)$. Montrer que $\overline{f}$ est un isomorphisme de Groupes.

Exercice 4: L'application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$ telle que $f(z) = |z|$

1) Montrer que f est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^*, \cdot)$

2) Trouver $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ puis appliquer le dernier résultat de l'exercice précedent.

Exercice 5: Montrer que le composé de deux homomorphismes de groupes est un homomorphisme de groupes.