1. Cours 1: Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

2. Cours 2: Fonctions et Applications

3. Cours 3: Relations

4. Cours 4: Quelques structures algébriques

5. Cours 5: Homomorphismes de structures algébriques

6. Cours 6: Anneau des polynômes

7. Cours 7: Espaces vectoriels

8. Cours 8: Applications linéaires.

8.1. Applications linéaires (Homomorphismes d'espaces vectoriels)

8.1.1.Définition: *Soient E et F deux K-espaces vectoriels.*

On appelle application linéaire (ou homomorphisme d'espaces vectoriels) de E dans F, toute application $f : E \to F$ telle que:

Pour tous $x, y \in E$ et pour tout $\alpha \in K$ on a: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\alpha \bullet x) = \alpha \bullet f(x)$

**Une application linéaire bijective est appelée isomorphisme.*

**Une application linéaire de E dans E est appelée endomorphisme de E*

**Un endomomorphisme bijectif est appelé automorphisme.*

8.1.2. Proposition: *Soient E et F deux K-espaces vectoriels.*

Une application $f : E \to F$ est une application linéaire, si et seulement, si

Pour tous $x, y \in E$ et pour tous $\alpha, \beta \in K$ on a: $f(\alpha \bullet x + \beta \bullet y) = \alpha \bullet f(x) + \beta \bullet f(y)$

Preuve: a) Supposons que f est une application linéaire, alors pour tous $x, y \in E$ et pour tous $\alpha, \beta \in K$ on a: $f(\alpha \bullet x + \beta \bullet y) = f(\alpha \bullet x) + f(\beta \bullet y) = \alpha \bullet f(x) + \beta \bullet f(y)$

b) Inversement, si f vérifie $f(\alpha \bullet x + \beta \bullet y) = \alpha \bullet f(x) + \beta \bullet f(y)$ pour tous $x, y \in E$ et pour tous $\alpha, \beta \in K$, alors en choisissant $(\alpha, \beta) = (1_K, 1_K)$ en suite

α quelconque et $\beta = 0_K$, on obtient: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\alpha \bullet x) = \alpha \bullet f(x)$ ■

Exemple 1: L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (2x+3y-z, x+z)$ est une application linéaire. En effet:

Pour tous $(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a:

$f(\alpha(x_1,y_1,z_1) + \beta(x_2,y_2,z_2)) = f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$

$= (2(\alpha x_1 + \beta x_2) + 3(\alpha y_1 + \beta y_2) - (\alpha z_1 + \beta z_2), (\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2))$

$= (\alpha(2x_1 + 3y_1 - z_1) + \beta(2x_2 + 3y_2 - z_2), \alpha(x_1 + z_1) + \beta(x_2 + z_2)) =$

$= \alpha(2x_1 + 3y_1 - z_1, x_1 + z_1) + \beta(2x_2 + 3y_2 - z_2, x_2 + z_2)$

$= \alpha f(x_1,y_1,z_1) + \beta f(x_2,y_2,z_2)$

* f n'est pas un isomorphisme d'espaces vectoriels (f n'est pas injective)

Exemple 2: L'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $g(z) = \overline{z}$ n'est pas une application linéaire, si on considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. En effet: Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ on a: $g(\alpha z + \beta z') = \overline{\alpha z} + \overline{\beta z'} = \overline{\alpha} g(z) + \overline{\beta} g(z')$

mais si on considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, les scalaires α, β seront choisis de $\mathbb{R}$, alors $\overline{\alpha} = \alpha$ et $\overline{\beta} = \beta$, donc dans ce cas g devient une application linéaire.

* g est un endomorphisme et puisque elle est bijective c'est un automorphisme.

Exemple 3: La dérivation des polynômes $D : K[X] \to K[X]$ qui associe à chaque polynôme P son polynôme dérivé P' (**Voir cours 6**) est une application linéaire.

$(D(\alpha P + \beta Q) = (\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q' = \alpha D(P) + \beta D(Q))$.

* D est un endomorphisme qui n'est pas un automorphisme (D n'est pas injective).

8.1.2.1. Remarque: Si f est une application linéaire alors l'image d'une combinaison linéaire de vecteurs est une combinaison linéaire de leurs images. C.à.d: $f\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i a_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i f(a_i)$ avec λ_i des scalaires et a_i des vecteurs.

8.1.3.Théorème: *Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors:*

1) $f(0_E) = 0_F$ (0_E et 0_F sont respectivement le zéro de E et le zéro F)

2) Pour tout $x \in E$: $f(-x) = -f(x)$

3) $\operatorname{Im} f = f(E)$ est un sous espace vectoriel de F.

4) $\ker f = f^{-1}\{0_F\}$ est un sous espace vectoriel de E.

5) f est surjectif si, et seulement, si $\operatorname{Im} f = F$

6) f est injectif si, et seulement, si $\ker f = \{0_E\}$

On rappelle (voir **cours 2 déf .2.1.2**) que $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) \ / \ x \in E\}$ et

$\ker f = f^{-1}\{0_F\} = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\}$

Preuve: 1) On a $f(0_E) = f(0_E) + 0_F = f(0_E) + f(0_E) - f(0_E)$
$= f(0_E + 0_E) - f(0_E) = f(0_E) - f(0_E) = 0_F$

2) $f(-x) + f(x) = f(-x+x) = f(0_E) = 0_F$, alors $f(-x) = -f(x)$.

3) On a d'après 1) $f(0_E) = 0_F$, alors $0_F \in \operatorname{Im} f$

Et si $y, y' \in \operatorname{Im} f$,alors $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Or, pour tous $\alpha, \beta \in K$ on a $\alpha y + \beta y' = f(\alpha x + \beta x')$, donc $\alpha y + \beta y' \in \operatorname{Im} f$, alors, d'après **cours 7, Coroll 7.2.1.1**, $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de F.

4) On a d'après 1) $f(0_E) = 0_F$, alors $0_E \in \ker f$

Et si $x, x' \in \ker f$, alors $f(x) = 0_F$ et $f(x') = 0_F$. Or, pour tous $\alpha, \beta \in K$ on a $f(\alpha x + \beta x') = 0_F$, d'où $\alpha x + \beta x' \in \ker f$, alors, d'après **cours 7, Coroll 7.2.1.1**, $\ker f$ est un sous espace vectoriel de E.

5) Cette assertion est exactement l'assertion b) de **cours 2 th 2.2.5.4**

6) Supposons que f est injectif, alors:

$\ker f = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\} = \{x \in E \ / \ f(x) = f(0_E)\} = \{0_E\}$

Inversement , supposons $\ker f = \{0_E\}$, alors:

Si $f(x) = f(x')$, alors $0_F = f(x) - f(x') = f(x - x')$, d'où $x - x' \in \ker f$, donc $x - x' = 0_E$ et $x = x'$, ainsi f est injectif. ■

Exemple: Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (2x + 3y - z, x + z)$.

1) $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (2x+3y-z, x+z) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$, et la résolution du système $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ montre que l'ensemble des solutions $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = y = -x\}$, alors f n'est pas injective, car $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

2) $\operatorname{Im} f = \{f(x,y,z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(2x+3y-z, x+z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$
$= \{x(2,1) + y(3,0) + z(-1,1) \ / \ x,y,z \in \mathbb{R}\}$

Alors $\operatorname{Im} f$ est le sous espace vectriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par la partie $G = \{(2,1), (3,0), (-1,1)\}$ qui n'est pas libre (sinon $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} f) = 3$ ce qui est impossible car $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} f) \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$)

D'après le **cours 7, th 7.5.2**, la partie G contient une base et comme la partie $G_1 = \{(2,1), (3,0)\}$ est libre, il existe une base A de $\operatorname{Im} f$ telle que $G_1 \subset A \subset G$ ce qui implque que $G_1 = A$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} f) = 2$ d'où $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ (**cours 7, th 7.6.3**), et par conséquent f est surjective.

8.1.4.Théorème: *Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors: $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire.*

C.à.d: La composée de deux applications linéaires est une application linéaire

Preuve: Soient $\alpha, \beta \in K$ et $x_1, x_2 \in E$, alors:

$$\begin{aligned} g \circ f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= g(f(\alpha x_1 + \beta x_2)) = g(\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)) \\ &= \alpha g(f(x_1)) + \beta g(f(x_2)) = \alpha g \circ f(x_1) + \beta g \circ f(x_2) \end{aligned}$$

d'où $g \circ f$ est une application linéaire ■

8.2. Applications linéaires et bases

8.2.1 Théorème: *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et f une application linéaire de E dans F.*

1) f est injective, ssi, l'image par f de toute partie libre de E est une partie libre de F

2) f est surjective, ssi, l'image par f de toute partie génératrice de E est une partie génératrice de F

3) f est un isomorphisme, ssi, l'image par f de toute base de E est une base de F

Preuve: 1.1) Supposons que f est injective, et soit $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ une partie libre de E. Montrons que $\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\}$ est une partie libre de F.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$, on a: $\lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + ... + \lambda_n f(a_n) = 0$ est équivaut à $f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n) = 0$ donc $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n \in \ker f = \{0\}$, d'où $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n = 0$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ et la partie $\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\}$ est libre.

1.2) Inversement, supposons que l'image de toute partie libre est une partie libre.

Montrons que f est injective.

Si $f(x) = 0$, alors la partie $\{0\}$ est l'image de la partie $\{x\}$, et comme $\{0\}$ n'est pas une libre, alors $\{x\}$ ne peut pas être libre, donc $x = 0$ (sinon $\{x\}$ sera libre), par conséquent $\ker f = \{0\}$ et f est injective.

2.1) Supposons que f est surjective, et soit $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ une partie génératrice de E. Montrons que $\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\}$ est une partie génératrice de F.

Soit $y \in F = \operatorname{Im} f$, alors $y = f(x)$, pour un certain $x \in E$ qui s'exprime comme combinaison linéaire des éléments de $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$: $x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + a_n a_n$, avec $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ d'où $y = x_1 f(a_1) + x_2 f(a_2) + ... + x_n f(a_n)$, par conséquent $\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\}$ est une partie génératrice de F.

2.2) Inversement, supposons que l'image de toute partie génératrice est une partie génératrice. Montrons que f est surjective.

Comme E est de dimension finie, alors il admet une partie génératrice $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, donc son image $\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\}$ est une partie génératrice de F.

Soit $y \in F$, alors il s'exprime comme combinaison linéaire des éléments de $\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\} : y = y_1 f(a_1) + y_2 f(a_2) + ... + y_n f(a_n)$, avec $y_1, y_2, ..., y_n \in K$ d'où $y = f(y_1 a_1 + y_2 a_2 + ... + y_n a_n)$, par conséquent f est surjective.

3.1) Si f est un isomorphisme, alors en combinant 1) et 2), on conclut facilement que l'image de toute base de E est une base de F.

3.2) Inversement, pour toute partie libre L et toute partie génératrice G de E, il existe deux bases A_1 et A_2 telles que $L \subset A_1$ et $A_2 \subset G$, alors $f(L) \subset f(A_1)$ et $f(A_2) \subset f(G)$ est comme $f(A_1)$ et $f(A_2)$ sont des bases, alors $f(L)$ est libre et $f(G)$ est génératrice, par conséquent f est injective et surjective par application de 1) et 2) ■

8.3. Applications linéaires et dimensions

8.3.1.Théorème: *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors:*

$$\dim_K E = \dim_K(\ker f) + \dim_K(\operatorname{Im} f).$$

Preuve: $\ker f$ est un sous espace de dimension finie (**th, 8.1.3 + cours 7, th 7.6.3**). Posons $k = \dim_K(\ker f)$ et soit $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ une base de $\ker f$ qu'on complète en base de E. Soit $\{e_1, e_2, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$, où $n = \dim_K E$.

Montrons que $\{f(e_{k+1}), ..., f(e_n)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

*Pour tous $\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n \in K$, si $\lambda_{k+1} f(e_{k+1}) + ... + \lambda_n f(e_n) = 0$ c'est à dire $f(\lambda_{k+1} e_{k+1} + ... + \lambda_n e_n) = 0$, alors $\lambda_{k+1} e_{k+1} + ... + \lambda_n e_n \in \ker f$, donc on peut l'exprimer comme combinaison linéaire des éléments de la base de $\ker f$:

$\lambda_{k+1} e_{k+1} + ... + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k \in K$.

Et en rassemblant tous les termes dans le premier membre de l'égalité, on obtient: $-\lambda_1 e_1 - ... - \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + ... + \lambda_n e_n = 0$, donc $\lambda_1 = ... = \lambda_k = \lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = 0$, par conséquent $\{f(e_{k+1}), ..., f(e_n)\}$ est une partie libre de $\operatorname{Im} f$.

*Soit $y \in \operatorname{Im} f$, alors $y = f(x)$, pour un certain $x \in E$ qui s'exprime comme combinaison linéaire des éléments de la base de E : $x = x_1 e_1 + ... + x_k e_k + x_{k+1} e_{k+1} + ... + x_n e_n$, avec $x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n \in K$ d'où $y = x_1 f(e_1) + ... + x_k f(e_k) + x_{k+1} f(e_{k+1}) + ... + x_n f(e_n) = x_{k+1} f(e_{k+1}) + ... + x_n f(e_n)$, par conséquent $\{f(e_{k+1}), ..., f(e_n)\}$ est une partie génératrice de $\operatorname{Im} f$.

En conclusion $\{f(e_{k+1}), ..., f(e_n)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$, et $\dim_K(\operatorname{Im} f) = n-k$, ainsi $n = \dim_K E = \dim_K(\operatorname{Im} f) + k = \dim_K(\operatorname{Im} f) + \dim_K(\ker f)$ ■

8.3.1.1. Remarque: Le théorème est vrai même en dimension infinie.

Exemple: Soit l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $g(a,b,c) = (b, a-b, b-c, a+2c)$

1) $\ker g = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (b, a-b, b-c, a+2c) = (0,0,0,0)\}$, et la résolution du système $\begin{cases} b = 0 \\ a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases}$ montre que l'ensemble des solutions $\ker g = \{(0,0,0)\}$.

Comme $\ker g = \{(0,0,0)\}$, alors g est injective.

2) On a $3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} g) + \dim_{\mathbb{R}}(\ker g) = \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} g)$, alors $\operatorname{Im} g \neq \mathbb{R}^4$, car $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. Par conséquent g n'est pas surjective.

8.3.1.2. Corollaire: *Si E et F sont deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors:*

1) $\dim_K(\operatorname{Im} f) = \dim_K E$ si, et seulement, si f est injective.

2) $\dim_K(\ker f) = \dim_K E - \dim_K F$ si, et seulement, si f est surjective.

Preuve: 1) f est injective si, et seulement, si $\ker f = \{0_E\}$ (**th, 8.1.3**), et comme $\dim_K(\{0_E\}) = 0$, alors $\ker f = \{0_E\}$ si, et seulement, si $\dim_K E = \dim_K(\operatorname{Im} f)$.

2) f est surjective si, et seulement, si $\operatorname{Im} f = F$ (**th, 8.1.3**), alors f est surjective si, et seulement, si $\dim_K E = \dim_K(\ker f) + \dim_K F$ ■

8.3.1.3. Corollaire: *Si E et F sont deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors:*

1) $\dim_K E = \dim_K F$ *si, et seulement si, E est isomorphe à F.*

2) $\dim_K E = n$ si, et seulement si, E est isomorphe à K^n.

Preuve: 1.1) Supposons $\dim_K E = \dim_K F = n$, et soient $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ une base F, alors l'application $f : E \to F$ telle que pour tous $x_1, x_2, ..., x_n \in K$: $f(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) = x_1f_1 + x_2f_2 + ... + x_nf_n$ est une application linéaire telle que $\dim_K(\operatorname{Im} f) = n = \dim_K E$, donc elle est injective (**coroll 8.3.1.2**), alors $\dim_K(\ker f) = 0 = \dim_K E - \dim_K F$, donc elle est surjective (**coroll 8.3.1.2**), par conséquent f est un isomorphisme de E dans F.

1.2) Inversement, si f est un isomorphisme de E dans F, alors $\dim E - \dim F = \dim(\ker f) = \dim E - \dim(\operatorname{Im} f) = 0$, (**coroll 8.3.1.2 + th 8.3.1**)

L'assertion 2) est une conséquence de 1) car $\dim_K K^n = n$ ■

8.3.2. Rang d'une application linéaire: *Le rang d'une application linéaire f noté $rg\ f$ est la dimension de son image.*

C.à.d: $rg\ f = \dim_K(\operatorname{Im} f)$.

8.3.2.1 Remarques: En dimension finie, on a:

1) $rg\ f = \dim_K(E) - \dim_K(\ker f)$, où E est l'espace de départ de f. (Voir **th 8.3.1**)

2) f est surjective, ssi, $rg\ f = \dim_K(F)$, où F est l'espace d'arrivée de f. (Voir **Coroll 8.3.1.2**)

Exemple: Soit l'application $h : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $h(P) = (X^2 + X + 4)P''$, où $\mathbb{R}_3[X]$ est l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré au plus 3 et P'' le polynôme dérivé du polynôme dérivé de P (voir **cours 6, déf 6.4.1**)

Montrons que h est un endomorphisme et calculons son rang.

1) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned} h(\alpha P_1 + \beta P_2) &= (X^2 + X + 4)(\alpha P_1 + \beta P_2)'' \\ &= \alpha(X^2 + X + 4)P_1'' + \beta(X^2 + X + 4)P_2'' = \alpha h(P_1) + \beta h(P_2) \end{aligned}$$

Alors h est une application linéaire.

2) Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ avec $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} h(P) &= (X^2 + X + 4)(2a_2 + 6a_3X) \\ &= (6a_3)X^3 + (2a_2 + 6a_3)X^2 + (2a_2 + 24a_3)X + 8a_2 \end{aligned}$$ qui est un polynôme de degré au plus 3, donc h est un endomorphisme.

3) $\ker f = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ h(P) = 0\}$ et si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, alors l'équation $h(P) = 0$ donne le système $\begin{cases} 6a_3 = 0 \\ 2a_2 + 6a_3 = 0 \\ 2a_2 + 24a_3 = 0 \\ 8a_2 = 0 \end{cases}$ dont la résolution montre que l'ensemble des solutions est $\ker f = \{P = a_0 + a_1X \ / \ a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ qui admet $\{1, X\}$ comme base, donc $\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 2$ et comme $\{1, X, X^2, X^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, alors $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.

En fin $rg\ h = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[X]) - \dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 4 - 2 = 2$, et par suite h n'est pas surjective.

Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
Département d'Informatique.
Module:Algèbre 2 ($1^{ère}$ Année LMD)

Fiche de T.D N^0 **8**

Exercice 1: Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définies par: $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + 2z, x - 2y - z)$ et $g(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z)$.

1) Montrer que f, et g sont des applications linéaires puis déterminer leurs noyaux et leurs images et préciser leurs dimensions.

2) Comparer $\operatorname{Im}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im} g$. En déduire que $g \circ f$ n'est pas injective.

3) Déterminer $g \circ f$.

Exercice 2: Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, définie par: $f(z_1, z_2) = (\overline{z_1} + iz_2, \overline{z_1} - z_2)$;

Montrer que f n'est pas linéaire si on considère $\mathbb{C}^2$ comme espace vectoriel complexe et que f est linéaire si on considère $\mathbb{C}^2$ comme espace vectoriel réel.

Déterminer $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2$, $\dim_{\mathbb{R}} (\ker f)$ et $\dim_{\mathbb{R}} (\operatorname{Im} f)$

Exercice 3: Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base d'un espace vectoriel réel E et soit φ l'endomorphisme de E défini par: $\varphi(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 4e_3$, $\varphi(e_2) = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ et $\varphi(e_3) = -e_1 - e_2 - e_3$.

1) Montrer que l'ensemble P des vecteurs invariants par φ est un sous espace vectoriel de E et calculer sa dimension.

2)D la droite vectorielle engendrée par $d = e_1 + e_2 + 2e_3$.Montrer que $E = P \oplus D$

Exercice 4: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x, y - f(x))$

1) Montrer que g est linéaire et déterminer $\ker g$.

2) En déduire que g est un automorphisme et déterminer g^{-1}.

Exercice 5: Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies, f une application linéaire de E dans F et B une base de E.

1) Montrer que f est un isomorphisme, ssi, $f(B)$ est une base de F.

2) Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par: $f(P) = (P(1), P'(1), P''(1))$

f est -elle un isomorphisme.($\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg P \leq 2\}$)

Exercice 6: Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définies par: $f(P) = X^2P' - 2XP$

Montrer que u est un endomorphisme et caculer son rang.

Exercice 7: Soit $f : E \to F$ une application linéaire (E et F des K-espaces vectoriels)

1) Montrer que $E/\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont isomorphismes.

2) Si E et F sont de dimensions finies, montrer que $\dim_K E = \dim_K (\ker f) + \dim_K (\operatorname{Im} f)$ (Utiliser l'exercice 8 du T.D 7)