Logique des prédicats

Sémantique

K. Akli et S. Mazouz
Département Informatique USTHB
2017-2018
Campusvirtuel.usthb.dz
smazouz@hotmail.com

Sémantique

Si **P** est un **prédicat binaire**, le sens de la formule atomique P(x, y) dépend :

- **L'interprétation du prédicat P**
  - comparatif (>, ≥, ..)
  - relation binaire « être ami de »
  - relation binaire « être frère de »,
  - relation binaire « est binôme avec », ….etc

- **Du domaine dans le quel les variables évoluent**
  - Ensemble des entiers naturels N
  - Ensembles des réels
  - Ensemble des êtres humains
  - Ensembles des étudiants, ….etc

- Des valeurs prises par les variables x et y dans le domaine considéré

Sémantique

Pour pouvoir interpréter (donner un sens) une formule, il faut :

- Choisir un **domaine d'interprétation D**
- Interpréter les **symboles de l'alphabet**
- interpréter les **termes**
- interpréter les **formules atomiques**
- interpréter les **formules composées**

Sémantique

Rappel

- **Une fonction n -aire f sur un ensemble A :**

  $f\ : A^n \rightarrow A$

et associe à un n-tuple de valeurs **$(a_1,\ldots,a_n)$**
une valeur **$f(a_1,\ldots,a_n) \in A$**

- **Une relation n-aire $\mathcal{R}$ sur un ensemble A :**

  est un ensemble de n-tuples **$(a_1,\ldots,a_n)$** dont les **éléments appartiennent tous à A**.

$$\mathcal{R}=\{(a_1,\ldots,a_n)\ /\ a_i \in A\}$$

Donc $\mathcal{R} \subseteq A^n$

Interprétation

Définition (Interprétation)

Soit **$D \neq \emptyset$** un ensemble appelé **domaine d'interprétation**.

L'interprétation I de domaine D est une correspondance telle que :

1. A tout symbole de constante, on associe un

   élément $I(a) \in D$

1. A tout symbole de fonction f d'arité n, on associe

   une fonction I(f) à n arguments définie de D^n dans D.

1. A tout symbole de prédicat P d'arité m, on associe

   une relation $I(P) \subseteq D^m$

1. Au prédicat d'égalité « = » d'arité deux, on associe

   la relation **$Diag_D = \{(d, d) / d \in D\}$**

Exemple

On définit l'interprétation standard I pour le langage L_N de l'arithmétique, **dont le domaine d'interprétation est $\mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers naturels),** de la manière suivante :

- $I(a)=0$,
- $I(f)=Succ$ tel que **Succ** : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
  $n \rightarrow n+1$
- $I(g)= (+)$ tel que **(+)** : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
  $a, b \rightarrow a+b$
- $I(h)=(*)$ tel que **(*)** : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
  $a, b \rightarrow a*b$
- au prédicat d'égalité '=' est associé la relation $Diag_N=\{(n,n) / n\in \mathbb{N}\}$

Rappel

Soit L_N un mini langage de l'arithmétique dont l'alphabet se compose de :

- Symboles de variables : $x_1, x_2, \ldots$
- Symbole de constante : **a**
- Symboles de fonctions :
  - **f** d'arité 1,
  - **g et h** d'arité 2
- Symbole de prédicat : '**=** ' d'arité 2
- Symboles logiques : ¬ , ^ et ∀
- Symboles impropres, : '(' , ')' et ','

Sémantique

Définition (Valuation)

Soit I une interprétation de domaine D du langage L.

On appelle ***valuation* V** des variables

toute fonction de **l'ensemble des variables var** dans D ($V : var \rightarrow D$),

qui associe à chaque variable **un élément du domaine D.**

Interprétation d'un terme

L'interprétation d'un terme t par une valuation V pour une interprétation I, noté par I(t)[V], est définie comme suit :

1. **t est une constante a :**

   $$I(t)[V] = I(a)$$

2. **t est une variable x :**

   $$I(t)[V] = V(x)$$

3. **$t = f(t_1,\ldots,t_n)$** où f est un symbole de fonction et $t_1,\ldots,t_n$ sont des termes :

   $$I(t)[V] = I(f)\,(I(t_1)[V],\ldots, I(t_n)[V])$$

Interprétation d'un terme

Exemples

On considère l'interprétation standard I pour le langage L_N.

Soit la valuation V avec **V(x)=4 et V(y)=6**

Donner l'interprétation des termes suivants :

- f(a)

  I(f(a)) = I(f)(I(a)) =Succ(0)= 1

- g(x, f(a))

- g(f(x), y)

Remarque

L'interprétation d'un terme ne contenant pas de variables ne dépend pas de la valuation.

Interprétation d'une formule

Soient :

- L un langage,
- I une **interprétation de L de domaine D**
- et V une **valuation définie sur D**.

L'interprétation d'une formule ***α par la valuation V pour une interprétation I***, notée I(***α)[V], est*** donnée par :

1. **La formule *α* est une formule atomique $P(t_1,\dots, t_n)$:**

   I($P(t_1,\dots, t_n)$)[V] est vraie ssi

   $(I(t_1)\ [V],\dots, I(t_n)\ [V]) \in I(P)$ où

   - I(P) est l'interprétation du prédicat P
   - I(ti) [V] est l'interprétation du terme ti (i=1,..,n).

Interprétation d'une formule

2. **La formule *α* est de la forme ¬β ou β∧δ :**
   utiliser les tables de vérité usuelles

3. **La formule *α* de la forme ∀x β :**
   I(**∀x β**)[V] est vraie ssi
   Tous les éléments de D vérifient la formule β

Donc **pour tout d ∈ D,**

I(β)[V(d/x)] est vraie

avec **V(d/x)** est la valuation **V sauf pour x** qui prend la valeur d

Interprétation

Exemples Soit $\alpha_1 = P(a, x)$ α_1 est une formule atomique

Soit l'interprétation I : D=N, I(a)=3, I(P)=« ≥ »

Soit V une valuation quelconque sur N

$I(\alpha_1)[V] = (I(a)[V], I(x)[V]) \in I(P)$

$= (I(a), V(x)) \in I(P)$

$= 3 \geq V(x)$

$I(P(t_1,\ldots, t_n))[V]$ est vraie ssi

$(I(t_1)[V],\ldots, I(t_n)[V]) \in I(P)$

L'interprétation de α_1 **dépend de la valuation donnée à x.**

Pour la valuation V1/ V1(x)=0 :

$I(\alpha_1)[V1] = 3 \geq 0$

donc $I(\alpha_1)[V1]$ Vraie

Pour la valuation V2/V2(x)=5 :

$I(\alpha_1)[V2] = 3 \geq 5$

donc $I(\alpha_1)[V2]$ est faux

Interprétation

Exemples Soit $\alpha_2 = \forall x\, P(x, y)$ α_2 est une formule composée non fermée

Soit l'interprétation I : D=N, I(a)=0, I(P)=« $\geq$ »

Soit V une valuation sur N

$I(\alpha_2)[V]$= pour tout d $\in$N,

$I(P(x,y))$**[V(d/x)]**

= pour tout d $\in$N, (I(x)[**V(d/x)**], I(y)[**V(d/x)**]) $\in$ I(P)

= pour tout d $\in$N, d $\geq$ V(y)

L'interprétation de α_2 dépend de la valuation donnée à y.

Pour la valuation V1/ V1(y)=0 :

$I(\alpha_2)[V1]$= pour tout d $\in$N, d $\geq$ 0

donc **$I(\alpha_2)$[V1]= Vraie**

Pour la valuation V2/V2(y)=5 :

$I(\alpha_2)[V1]$= pour tout d $\in$N, d $\geq$ 5

donc **$I(\alpha_2)$[V2]= faux** car on a un **contre exemple avec d=2**

I($\forall$**x** β)[V] est vraie ssi
pour tout d $\in$ D,
I(β)[V(d/x)] est vraie

Interprétation

Exemples Soit $\varphi = \forall x\ P(x, a)$ φ est une formule composée fermée

1. **Soit l'interprétation I : D=N, I(a)=0, I(P)=« ≥ »**

Soit V une valuation quelconque sur N

$I(\varphi)[V]$= pour tout $d \in N$, $(I(x)[V(d/x)], I(a)) \in I(P)$

= pour tout $d \in N$, $d \geq 0$

$I(\varphi)[V]$= vraie

$I(\forall x\ \beta)[V]$ est vraie ssi
pour tout $d \in D$,
$I(\beta)[V(d/x)]$ est vraie

2. **Soit l'interprétation J : D=N, J(a)=0, J(P)=« > »**

Soit V une valuation sur N

$J(\varphi)[V]$= pour tout $d \in N$, $(J(x)[V(d/x)], J(a)) \in J(P)$

= pour tout $d \in N$, $d > 0$

$J(\varphi)[V]$ = faux il suffit de prendre comme contre exemple d=0

Remarque

L'interprétation d'une **formule fermée** ne dépend pas de la valuation.

Satisfaisabilité

Définition

Soient

- L un langage
- I une interprétation de domaine D
- V une valuation sur D
- α une formule.

On dit qu'une ***formule α est satisfaisable par la valuation V pour l'interprétation I***

et on note $I \models \alpha[V]$

si l'interprétation de la formule α est vraie

$I(\alpha)[V]$ est vraie

Satisfaisabilité

Exemple Considérons $\alpha_2 = \forall x\, P(x, y)$ (voir slide N° 13)

Soit l'interprétation I : D=N, I(a)=0, I(P)=« ≥ »

$I(\alpha_2)[V]$ = pour tout d $\in$N, d $\geq$ V(y)

L'interprétation de α_2 dépend de la valuation donnée à y.

1. **Pour la valuation V1/ V1(y)=0** :

   $I(\alpha_2)[V1]$= pour tout d $\in$N, d ≥ 0

   donc **$I(\alpha_2)[V1]$= Vraie**

Donc α_2 **est satisfaisable par la valuation V1 pour l'interprétation I**

et on note $I \models \alpha_2[V1]$

2. **Pour la valuation V2/V2(y)=5 :**

   $I(\alpha_2)[V1]$= pour tout d $\in$N, d ≥ 5

   donc **$I(\alpha_2)[V2]$= faux** car on a un **contre exemple avec d=2**

Donc α_2 **n'est pas satisfaisable par la valuation V2 pour l'interprétation I**

et on note $I \not\models \alpha_2[V2]$

Satisfaisabilité et Valide

Définition

Soient

- L un langage,
- I une interprétation de domaine D
- α une formule.

Deux cas peuvent se présenter :

- ***Il existe une valuation* V sur D,** telle que

$$I \models \alpha[V],$$

on dit que **α est satisfaisable pour I.**

- ***Quelque soit la valuation* V sur D**, on a

$$I \models \alpha[V],$$

on dit que **α est valide pour I** et on note $I \models \alpha$

Satisfaisable et Valide

Exemple

Soient la formule α : f(x,y) = a et l'interprétation I telle que :

D = N, I(f) = * et I(a)= 100 ∈ N

Montrons que α est satisfaisable pour I.

Soit la valuation **V** suivante telle que :

V(x) = 20 et **V**(y)=5

I (α) [**V**] : V(x)*V(y)=I(a) donc 20 * 5 = 100 qui est vraie

I (α) [**V**] est Vraie, c-à-d : I ⊨ α [**V**].

α est donc Satisfaisable pour I

car on a trouvé une valuation **V** telle que I ⊨ α [**V**].

Satisfaisable et Valide

Soit $\alpha = \exists x\, P(x, y)$. Notons que la formule α est non fermée.

1. Soit I l'interprétation suivante:

D=N et I(P)=**'multiple de'**.

Considérons une valuation **V** quelconque sur N.

I(α)[**V**] = il existe d $\in$ N, **d est multiple de V (y).**

quelque soit la valuation **V**, il suffit de prendre d = **V** (y)

En effet tout nombre est multiple de lui-même.

Donc I(α)[**V**] est vraie, pour toute valuation V.

Ainsi, α est valide pour I.

Satisfaisable et Valide

$\alpha = \exists x\, P(x, y)$

2. Soit J l'interprétation suivante : D = N et J(P) = '<'.

Considérons une valuation **V** quelconque sur N.

$I(\alpha)[\mathbf{V}]$ = il existe $d \in N$, $(d, V(t)) \in I(P)$

= il existe $d \in N$, $d < \mathbf{V}(y)$.

$I(\alpha)[\mathbf{V}]$ est vraie pour la valuation $\mathbf{V_1}(y) = 3$

Il suffit de prendre d=1

mais fausse pour la valuation $\mathbf{V_2}(y) = 0$.

Donc α n'est pas valide pour J.

Satisfaisable et Universellement valide

Définition

Soient

- L un langage
- α une formule.

Deux cas peuvent se présenter :

- ***Il existe une interprétation I*** **de domaine D** **et** ***il existe une valuation V*** définie sur D, tels que

$$I \models \alpha[V],$$

on dit que **α est satisfaisable**.

- ***Quelque soit l'interprétation I*** **de domaine D** **et** ***quelque soit la valuation V*** définie sur D,

$$\text{on a } I \models \alpha[V],$$

on dit que **α est universellement valide** et on note $\models \alpha$.

Satisfaisable et Universellement valide

Exemple

Soit une formule $\alpha : P(x, a)$,

- l'interprétation I telle que $D = N$, $I(P)=$ '$\geq$', $I(a)= 5 \in N$
- V_1 une valuation telle que $V_1(x)=6$

$I(\alpha)[V_1] : V_1(x) \geq I(a)$ ie $6 \geq 5$ qui est vraie

$I(\alpha)[V_1]$ est vraie

Ainsi on a trouvé une interprétation I et une valuation V_1 telle que $I \models \alpha[V_1]$

Donc α est satisfaisable.

Satisfaisable et Universellement valide

Exemple

Soit la formule $\alpha = \forall x \exists y P(x, y)$; c'est une formule fermée.

Considérons les deux interprétations suivantes :

1. l'interprétation I telle que D = N et **I(P) = « multiple de ».**

$I(\alpha)$= quelque soit $d_1 \in N$, il existe $d_2 \in N$ tel que, $(d_1, d_2) \in I(P)$

= quelque soit $d_1 \in N$, il existe $d_2 \in N$ tel que, **d_1 est multiple de d_2**.

Cette interprétation est vraie,

il suffit de prendre $d_2 = d_1$.

Donc **α est valide pour I**.

2. L'interprétation J telle que D=N et **J(P)=« > »**

$J(\alpha)$= quelque soit $d_1 \in N$, il existe $d_2 \in N$ tel que, $d_1 > d_2$.

$J(\alpha)$ est faux. En effet, nous avons un contre exemple :

pour $d_1=0$, il n'existe pas d_2 vérifiant $d_1 > d_2$.

Donc **α n'est pas valide pour J**.

Par conséquent α n'est pas universellement valide.

Satisfaisable et Universellement valide

Exemple

Soit la formule α : $\forall x \; (R(x) \vee \neg R(x))$; α est une formule fermée

- Soit I une interprétation quelconque sur D, on a :

  $I(\alpha)$ = quelque soit d $\in$ D, **d $\in$ I(R) ou non (d$\in$ I(R))**

  $I(\alpha)$ est Vraie

  car tout élément du domaine

  soit il vérifie la relation I(R), soit il ne l'a vérifie pas
- Donc quelque soit I on a : I $\models \alpha$, autrement dit :

  α est Universellement Valide.

Exercice Vérifier si les formules suivantes sont universellement valides

- $p(a, b) \wedge \neg \exists y \; p(a, y)$
- $(\forall x \; P(x)) \vee (\exists y \; \neg P(y))$

Sémantique

Remarques

- $\models \alpha$ (**Universellement valide**)

  $\Leftrightarrow \quad \forall I \; \forall V, I \models \alpha[V]$

- $\not\models \alpha$ (**Non universellement valide**)

  $\Leftrightarrow \exists I \; \exists V, I \not\models \alpha[V]$

- $I \not\models \alpha$ (**non valide pour I**)

  $\Leftrightarrow \exists V, I \not\models \alpha[V]$

- α **non satisfaisable**

  $\Leftrightarrow \forall I \; \forall V, I \not\models \alpha[V]$

Modèle

Définition

Soit Γ un ensemble de formules,

on dira qu'une **interprétation $\mathbf{M}$ est un modèle de Γ**, ssi

toutes les formules de Γ sont valides pour l'interprétation $\mathbf{M}$.

c-à-d : quelque soit $\alpha \in \Gamma$, on a $\mathbf{M} \models \alpha$.

Modèle

Exemple $\alpha = \exists x\, P(x, y)$ et $\beta = \forall x\, P(x, a)$

Soi l'interprétation I : **D=N, I(a)=0 et I(P) =« ≥ »**

Soit V une valuation quelconque sur N:

1/ **I(α)[V]= il existe d $\in$N, (d, V(y)) $\in$I(P)**

=il existe d $\in$N, d $\geq$V(y)

Pour toute valuation V, I(α)[V] est vraie il suffit de prendre d=V(y),

donc α est valide pour I

2/ **I(β)[V]= quelque soit d $\in$N, (d, I(a)) $\in$I(P)**

= quelque soit d $\in$N, d $\geq$0

I(β)[V] est toujours vraie

donc β est valide pour I

Donc I est modèle de {α, β}.