

Introduction à la Logique Mathématique

S. Mazouz & K.Aki

USTHB

Campusvirtuel.usthb.dz

smazouz@hotmail.com

Conjecture ???

Une **conjecture** est une **assertion** pour laquelle on ne connaît pas encore de **démonstration** mais que l'on croit fortement **être vraie**, en l'absence de **contre-exemple**.

- « Combien de boulets de canon peut-on ranger dans un espace donné ? »,
question que [Sir Walter Raleigh](#), navigateur et explorateur britannique [du 16ème siècle](#), pose à son ami le [mathématicien et astronome Thomas Harriot](#).
- Quand on range les boulets l'un après l'autre, au hasard, ils ne remplissent que 62 à 65% de l'espace disponible.
- Tandis qu'un rangement soigneux permet de dépasser 70%.

En termes mathématiques, quel est l'arrangement compact de sphères identiques le plus dense ?

Harriot a transmis la question à J. Kepler





Conjecture de Kepler (1611)

- L'arrangement optimal est un empilement de plans où chaque sphère repose dans le creux formé par trois sphères adjacentes du plan inférieur.
- c'est celui des oranges empilées que l'on peut observer sur les étales des magasins de fruits et légumes, et qui est appelé empilement cubique à faces centrées. Il permet d'atteindre 74,048 % de l'espace disponible .

- Tester toutes les configurations possibles ???
 - Le nombre est infini!!!!

1998, T. Hales a proposé une preuve sur 250 pages en s'appuyant sur des calculs numériques gigantesques réalisés par ordinateur.

- 5000 cas à analyser
- 3 Gigabytes de code informatique
- La preuve a été validée à 99% et publiée en 2005 dans les Annals of Mathematics.



- 2004, T. Hales a lancé le **projet *Flyspeck***, (<http://code.google.com/p/flyspeck/wiki/FlyspeckFactSheet>) visant à établir une **preuve formelle** de son théorème, qui puisse être validée à l'aide d'un **assistant de preuve** sur ordinateur, capable de vérifier que les **étapes de la démonstration sont logiquement valides**.
- le 10 août 2014, Thomas Hales a annoncé que le projet flyspeck avait abouti.

Raisonnement Logique

Exemples :

1. S'il pleut alors le sol est mouillé
Il pleut
donc le sol est mouillé
2. Si le candidat maîtrise l'Anglais alors il est embauché
il maîtrise l'Anglais
donc il est embauché.

Même structure de raisonnement , on peut la représenter comme suit :

Si p alors q

p

donc q

On parle de « modus ponens »

On a remplacé les mots substituables par des symboles.

Les mots de liaison (si alors, et, ou, car,..) jouent un rôle important.

Raisonnement Logique

Exemples

1. S'il pleut alors le sol est mouillé
le sol n'est pas mouillé
Donc il ne pleut pas

Si p alors q
non q
donc non p

2. S'il pleut alors le sol est mouillé
le sol est mouillé
donc il pleut

Raisonnement incorrect !!!

On a peut être versé un seau d'eau sur le sol

Raisonnement logique

- La logique étudie les méthodes et les principes employés pour distinguer un raisonnement correct de l'incorrect.
- Ce cours a pour objectif de vous montrer comment on a codifié certaines règles que vous utilisez quand vous raisonnez correctement.

Systeme formel Logique

1. Langage formel
2. Systeme de deduction : ensemble d'axiomes et de regles permettant de faire des preuves formelles.
3. Modele : permettant d'associer des valeurs de verite aux expressions du langage.

Systeme Formel Logique

Un problème fondamental de la logique mathématique concerne l'étude des rapports entre les deux concepts **preuve et vérité** :

- notion de consistance
- notion de complétude

Les différentes Logiques

Logique classique respecte des principes classiques tq :

- Principe de Bivalence (deux valeurs de vérité)
- Principe du tiers exclu (« p ou non p » est vraie)
- Principe de non contradiction (« p et non p » est faux)

1. Logique propositionnel : relations entre les propositions (négation, conjonction, disjonction, etc..)
2. Logique des prédicats : permet de définir des entités, des fonctions sur les entités et des relations entre les entités.

Les différentes Logiques

Les autres logiques

- Extensions des logiques classiques
 - Les logiques modales
 - Les logiques temporels
 - Les logiques de description
- Les logiques non classiques
 - Les logiques trivalentes

Applications de la logique

- Electronique (Circuits électroniques)
- Assistants de preuve (Par exemple Coq) :
 - la correction de programmes
 - Preuve mathématiques avancées (Théorème des 4 couleurs, conjecture de Kepler, ..)
- Validation des spécifications
- Diagnostic des pannes ou diagnostic médical (base de connaissances)
- Bases de données (les langages de requêtes des Bases de données)
- Etc...

Paradoxe du Barbier

Sur l'enseigne du barbier du village, on peut lire:

« **Je rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement cela** ».

Paradoxe exposé par Bertrand Russel en 1918

- **S'il se rase lui-même :**
il ne respecte pas son enseigne car il raserait quelqu'un (lui-même) qui se rase lui-même.
- **S'il ne se rase pas lui-même :**
son enseigne ment car il ne rase pas au moins un homme (lui-même) qui ne se rase pas lui-même.

Il y'a deux ensembles :

- Celui des hommes qui se rasent eux-mêmes
- Celui des hommes qui se rasent par le barbier

Le barbier ne peut appartenir à l'un d'entre eux!!!!

Paradoxe de Russell

$$R = \{ X / X \notin X \}$$

Question : $R \in R$?

1. $R \in R \Rightarrow R \notin R$

2. $R \notin R \Rightarrow R \in R$

donc on a : $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$