Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Première année Informatique, sections **A** et **B**.

U.M.M.T.O

Partiel d'analyse 2

Mai 2023 Durée: 1h30mn

Exercice 1:(10pts) Les deux parties sont indépendantes:

I) Calculer les intégrales suivantes:

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx, \quad \int \frac{\sin x + \sin 2x}{2+\cos^2 x}dx$$

II) Pour tout entier naturel n, on définit: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. En intégrant I_n par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n-2}, $(n \geq 2.)$
3. En déduire la valeur de I_n selon que l'entier n est pair ou impair.
4. Soit $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, en utilisant un changement de variable, montrer que $J_n = I_n$.

Exercice 2:(10pts) les deux parties sont indépendantes.

I) Soit $x \in]1, +\infty[$ et cosidérons l'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{x \ln x}y = \frac{1}{\ln x} \quad (E_1)$$

1. Résoudre l'équation (E_1).
2. Trouver la solution de (E_1) vérifiant $y(2) = 1$.

II) On considère l'équation différentielle suivante:

$$y'' + 5y' + 4y = (x+1)e^{2x} \quad (E_2)$$

1. Résoudre l'équation (E_2).
2. Trouver la solution de (E_2) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

Bon courage!

— Corrigé d'EMD d'analyse 2 —

Exercice 1 :

1) calculons $\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx$

On décompose en éléments simples la fraction $\frac{1}{x(x^2+1)}$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$
$$= \frac{a(x^2+1)+(bx+c)x}{x(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}$$

Donc : $(a+b)x^2+cx+a = 1 = 0x^2+0x+1 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \Rightarrow b=-a=-1 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases}$

D'où : $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1}$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2p

2) calculons $\int \frac{\sin x + \sin 2x}{2+\cos^2 x}dx$

on a $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ donc : $\frac{\sin x+\sin 2x}{2+\cos^2 x} = \frac{(1+2\cos x)\sin x}{2+\cos^2 x}$

on pose le changement de variable $t = \cos x$, on a $dt = -\sin x\, dx$

donc : $dx = \frac{-dt}{\sin x}$

$$\int \frac{1+2\cos x}{2+\cos^2 x}\sin x\, dx = \int \frac{1+2t}{2+t^2}\cancel{\sin x}\left(\frac{-dt}{\cancel{\sin x}}\right)$$
$$= -\int \frac{1+2t}{2+t^2}dt$$
$$= -\int \frac{1}{2+t^2}dt - \int \frac{2t}{2+t^2}dt$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - \ln(t^2+2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

on remplace t donc :

2p

$$\int \frac{\sin x+\sin 2x}{2+\cos^2 x}dx = \frac{-1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right) - \ln(\cos^2 x+2) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

II) Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$. 1) Calculons I_0 et I_1 :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}. \quad 0{,}5$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\underbrace{\cos \pi/2}_{0} + \underbrace{\cos 0}_{1} = 1 \quad 0{,}5$$

2) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin^{n-1} x \, dx$, on utilise une I.p.p

On pose : $u'(x) = \sin x \Rightarrow u(x) = -\cos x$ et $v(x) = \sin^{n-1} x \Rightarrow v'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x$

$$I_n = \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx$$

$$= -\underbrace{\cos \pi/2}_{0} \sin^{n-1} \pi/2 + \cos 0 \underbrace{\sin^{n-1} 0}_{0} + (n-1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx$$

$$= (n-1)\left[\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx}_{I_{n-2}} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx}_{I_n}\right] = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$\Rightarrow I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \Rightarrow n I_n = (n-1) I_{n-2}$, donc :

$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}} \cdots (*) \quad 2$$

3) Calculons I_n pour n pair et n impair : D'après $(*)$:

$n = 2$: $\cancel{I_2} = \frac{1}{2} I_0$

$n = 4$: $\cancel{I_4} = \frac{3}{4} \cancel{I_2}$

$\vdots$

$n = 2k-2$: $\cancel{I_{2k-2}} = \frac{2k-3}{2k-2} \cancel{I_{2k-4}}$

$n = 2k$: $I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cancel{I_{2k-2}}$

on fait le produit, on trouve :

$$I_{2k} = \frac{1.3.5 \ldots (2k-1)}{2.4.6 \ldots 2k} I_0 \text{ et } I_0 = \pi/2$$

$$\boxed{I_{2k} = \frac{1.3.5 \ldots (2k-1)}{2.4.6 \ldots 2k} \frac{\pi}{2}} \quad 0{,}5$$

De même pour n impair, on trouve : $I_{2k+1} = \frac{2.4.6 \ldots 2k}{3.5.7 \ldots (2k+1)} I_1$ et $I_1 = 1$

Donc : $\boxed{I_{2k+1} = \frac{2.4.6 \ldots 2k}{3.5.7 \ldots 2k+1}}$ 0,5

3) Soit $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$, montrons que $J_n = I_n$.

on sait que : $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, donc on pose $t = \frac{\pi}{2} - x$, dans ce cas :

$x = \frac{\pi}{2} - t$ et $dx = -dt$, d'où :

$$J_n = -\int_{\pi/2}^{0} \cos^n(\tfrac{\pi}{2} - t) \, dt = -\int_{\pi/2}^{0} \sin^n t \, dt \quad \text{car } \cos(\tfrac{\pi}{2} - t) = \sin t$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt \quad \text{car } \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

$$1 \quad = I_n \quad \text{C.Q.F.D}$$

Exercice 2 (I) Soit : $y' + \frac{1}{x\ln x} y = \frac{1}{\ln x}$ (E_1), $x > 1$.

1) Résoudre (E_1) :

a) Cherchons $y_0(x)$ solution de $y' + \frac{1}{x\ln x} y = 0$

On sait que $y_0(x) = \lambda e^{A(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et $A(x) = \int a(x)\,dx$.

on a : $y' + \frac{1}{x\ln x} y = 0 \Rightarrow y' = \frac{-1}{x\ln x} y \Rightarrow a(x) = \frac{-1}{x\ln x}$

Donc :

$A(x) = \int \frac{-1}{x\ln x} dx = -\int \frac{\overset{f'}{1/x}}{\underset{f}{\ln x}} dx = -\ln|\ln x| = -\ln(\ln x)$ car $\ln x > 0$ $(x > 1)$.

Donc : $y_0(x) = \lambda e^{-\ln(\ln x)}$

$\boxed{y_0(x) = \frac{\lambda}{\ln x}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (2)

b) Cherchons $y_p(x)$ solution particulière de (E_1) :

on a $y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{\ln x}$, cherchons $\lambda(x)$.

y_p solution de $(E_1) \Rightarrow y_p' + \frac{1}{x\ln x} y_p = \frac{1}{\ln x}$

$\Rightarrow \frac{\lambda'(x)\ln x - \lambda(x)\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} + \frac{1}{x\ln x} \cdot \frac{\lambda(x)}{\ln x} = \frac{1}{\ln x}$

$\Rightarrow \frac{\lambda'(x)}{\ln x} - \frac{\lambda(x)}{x(\ln x)^2} + \frac{\lambda(x)}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln x}$

$\Rightarrow \frac{\lambda'(x)}{\ln x} = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow \lambda'(x) = 1 \Rightarrow \lambda(x) = \int 1\,dx = x$

Donc $\boxed{y_p(x) = \frac{x}{\ln x}}$ (2)

La solution générale de (E_1) est :

$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$ (0,5)

$= \frac{\lambda}{\ln x} + \frac{x}{\ln x} = \frac{\lambda + x}{\ln x} \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{\lambda + x}{\ln x}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

2) Cherchons $y(x)$ qui vérifie $y(2) = 1$

$y(2) = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda + 2}{\ln 2} = 1$

$\Rightarrow \lambda = \ln 2 - 2$, on le remplace dans $y(x)$.

$\boxed{y(x) = \frac{\ln 2 - 2 + x}{\ln x}}$ (0,5)

II) Résoudre : $y'' + 5y' + 4y = (x+1)e^{2x}$ ... (E_2)

a) Cherchons $y_0(x)$:

L'equation caractéristique est : $r^2 + 5r + 4 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9 \Rightarrow r_1 = \frac{-5-3}{2} = -4$ et $r_2 = \frac{-5+3}{2} = -1$

Donc : $\boxed{y_0(x) = Ae^{-x} + Be^{-4x}}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ (1)

b) Cherchons $y_p(x)$:

on a : $f(x) = (x+1)e^{2x}$ qui est de la forme $P(x)e^{\alpha x}$, on a $\alpha = 2$ et 2 n'est pas une racine de $r^2 + 5r + 4 = 0$ donc :

$y_p(x) = Q(x)e^{2x}$, avec $Q(x)$ est de même degré que $P(x)$ qui est 1

donc $Q(x) = ax + b$, d'ou $y_p(x) = (ax+b)e^{2x}$, cherchons a et b

- $y_p' = ae^{2x} + 2(ax+b)e^{2x}$

  $y_p' = (2ax + a + 2b)e^{2x}$

- $y_p'' = 2ae^{2x} + 2(2ax + a + 2b)e^{2x} = (4ax + 4a + 4b)e^{2x}$

y_p solution de $(E_2) \Rightarrow y_p'' + 5y_p' + 4y_p = (x+1)e^{2x}$

$\Rightarrow (4ax + 4a + 4b)e^{2x} + 5(2ax + a + 2b)e^{2x} + 4(ax+b)e^{2x} = (x+1)e^{2x}$

$\Rightarrow (18ax + 9a + 18b)e^{2x} = (x+1)e^{2x}$

$\Rightarrow 18ax + 9a + 18b = x + 1$, par identification

$\begin{cases} 18a = 1 \\ 9a + 18b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{18}$ et $b = \frac{1}{36}$

Donc $\boxed{y_p(x) = \left(\frac{1}{18}x + \frac{1}{36}\right)e^{2x}}$ (2,5) la solution générale : $\boxed{y(x) = Ae^{-x} + Be^{-4x} + \left(\frac{1}{18}x + \frac{1}{36}\right)e^{2x}}$

$A, B \in \mathbb{R}$ (0,5)

2) Cherchons $y(x)$ qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$

$y'(x) = -Ae^{-x} - 4Be^{-4x} + \frac{1}{18}e^{2x} + \left(\frac{2}{18}x + \frac{2}{36}\right)e^{2x}$

$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + \frac{1}{36} = 1 \\ -A - 4B + \frac{1}{18} + \frac{2}{36} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = \frac{35}{36} \quad \text{..(1)} \\ -A - 4B = \frac{32}{36} \quad \text{..(2)} \end{cases}$

$(1) + (2) \Rightarrow -3B = \frac{67}{36} \Rightarrow B = -\frac{67}{108}$

$A = \frac{35}{36} - B = \frac{35}{36} + \frac{67}{108} = \frac{172}{108} = \frac{43}{27} \Rightarrow A = \frac{43}{27}$

Donc : $\boxed{y(x) = \frac{43}{27}e^{-x} - \frac{67}{108}e^{-4x} + \left(\frac{1}{18}x + \frac{1}{36}\right)e^{2x}}$ (1)