Réduction des endomorphismes
(Algèbre 3)

Destiné aux étudiants de la :

2$^{\text{ème}}$ année Licence de Mathématiques

FARHI Bakir
(Maître de conférence de classe B à l'Université A. Mira de Béjaia)

Préface

Ce polycopié est issu du cours d'Algèbre 3 de la $2^{\text{ème}}$ année Licence de Mathématiques que j'ai le privilège de diriger depuis l'année universitaire 2012-2013.

Le premier et le second chapitre du polycopié traitent *les valeurs propres*, *les espaces propres* et *la diagonalisabilité* des endomorphismes en dimension finie. Ce sont des notions simples mais très importantes que l'étudiant doit maitriser parfaitement.

Tout au long de ce polycopié, nous avons mis en garde l'étudiant sur l'importance du calcul de la puissance $k^{\text{ème}}$ d'une matrice carré. C'est en quelque sorte notre but locomotif pour la recherche d'autres types de *réductions* et d'autres techniques de calcul matriciel.

Au troisième chapitre, nous introduisons *la trigonalisation* des endomorphismes. Un théorème fondamental affirme que toute matrice carrée à coefficients complexes est trigonalisable. C'est aussi la trigonalisation que nous utilisons pour démontrer l'important *théorème de Cayley-Hamilton* du quatrième chapitre. La trigonalisation permet aussi de calculer la puissance $k^{\text{ème}}$ d'une matrice carrée lorsque celle-ci possède une unique valeur propre et ce en se servant de *la formule du binôme matricielle*. Bien que la trigonalisation ne règle, que dans un cas particulier, le problème du calcul de la puissance $k^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme (resp. d'une matrice carrée), ceci s'avère suffisant grâce à l'idée qui consiste à restreindre l'endomorphisme en question à des espaces particuliers, appelés *espaces caractéristiques* et étudiés au cinquième chapitre. Par ailleurs, l'idée de se servir de la formule du binôme matricielle pour calculer la puissance $k^{\text{ème}}$ d'une matrice carrée trouvera son succès total avec *la décomposition de Dunford* d'un endomorphisme, ce qui est proposé sous forme d'exercice au $5^{\text{ème}}$ chapitre.

Au quatrième chapitre, nous étudions *les polynômes annulateurs* d'un endomorphisme et leur lien avec les valeurs propres. Le très important *théorème de Cayley-Hamilton* est étudié et démontré par le moyen de la trigonalisation. Nous introduisons aussi la notion de *polynôme minimal* (qui est essentiellement le polynôme de plus petit degré qui annule l'endomorphisme en question), puis nous donnons la méthode pour le déterminer dans des cas concrets, qui se sert justement du théorème de Cayley-Hamilton. Nous verrons également que la forme du polynôme minimal (contrairement à celle du polynôme caractéristique) nous renseigne immédiatement sur la diagonalisabilité de l'endomorphisme en question. L'une des choses importantes que l'étudiant découvrira aussi dans ce chapitre est la possibilité de calculer la puissance $k^{\text{ème}}$ d'une matrice carrée, sans lui effectuer aucune réduction préalable ; on utilise plutôt un polynôme annulateur. Notons enfin que la notion de "polynômes annulateurs" est valable même pour des endomorphismes sur des espaces vectoriels de dimensions infinies et cette notion est l'une des clefs de la théorie de la réduction des endomorphismes en dimension infinie. Bien entendu, cette théorie sort du programme réservé au module d'Algèbre 3 et par conséquent, nous l'avons écartée de ce polycopié.

Au cinquième chapitre, nous étudions *les espaces caractéristiques* d'un endomorphisme. Grossièrement, ce sont des espaces vectoriels stables par l'endomorphisme en question et dont les endomorphismes restreints à chacun d'entre eux ont une unique valeur propre. Nous utilisons ensuite ces espaces caractéristiques pour un nouveau type de réduction que l'on appelle *diagonalisation par blocs triangulaires* et qui résout définitivement le problème du calcul de la puissance $k^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme en dimension finie (resp. d'une matrice carrée).

Au sixième chapitre, nous étudions le dernier type de réduction que l'on appelle *jordanisation*. C'est la réduction la plus technique mais elle offre l'avantage d'une maîtrise parfaite de l'endomorphisme en question. Outre le calcul de la puissance $k^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme et la résolution des systèmes linéaires d'équations différentielles, la jordanisation permet de classifier les matrices carrées d'un même ordre via la relation d'équivalence "semblable" (deux matrices carrées de même ordre sont dites semblables si elles représentent un même endomorphisme relativement à deux bases différentes d'un certain espace vectoriel).

Au septième et dernier chapitre, nous montrons à travers des exemples comment appliquer les connaissances acquises aux chapitres précédents pour résoudre des problèmes sur les suites récurrentes ainsi que des problèmes de résolutions des systèmes linéaires d'équations différentielles.

Notons enfin que chaque chapitre est suivi d'une multitude d'exercices qui permettent à l'étudiant de consolider ses connaissances acquises d'un chapitre donné avant qu'il passe au chapitre suivant.

Bakir FARHI
Béjaia, le 27 janvier 2014

Table des matières

Notations

$:=$	Egalité par définition qu'on représente aussi parfois par le signe $\overset{\text{déf}}{=}$.
$\sqcup$	Le symbole de la réunion disjointe.
$\mathbf{0}_E$	Le vecteur nul d'un espace vectoriel E.
$\mathbf{0}$	L'endomorphisme nul de l'espace vectoriel en cours d'étude.
$(\mathbf{0})$	La matrice nulle d'un certain format.
Id_E	L'endomorphisme identité d'un espace vectoriel E.
I_n	La matrice identité d'ordre n (où n est un entier strictement positif).
$\mathrm{Vect}(X)$	Le sous-espace vectoriel engendré par une partie X d'un espace vectoriel donné.
$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$	La matrice associée à un endomorphisme f, d'un espace vectoriel de dimension finie, relativement à une base $\mathscr{B}$ de cet espace vectoriel.
$\det(f)$	Le déterminant de f (où f est un endomorphisme d'un certain espace vectoriel).
$\det(A)$	Le déterminant de A (où A est une matrice carrée à coefficients dans un certain corps commutatif).
$\mathrm{tr}(f)$	La trace d'un endomorphisme f d'un certain espace vectoriel.
$\mathrm{tr}(A)$	La trace d'une matrice carrée A ; c'est-à-dire la somme des éléments de la diagonale de A.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où n est un entier strictement positif et $\mathbb{K}$ est un corps commutatif).
$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$	L'ensemble des matrices de format $n \times m$, à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où n et m sont des entiers strictement positifs et $\mathbb{K}$ est un corps commutatif).
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$	Le groupe linéaire d'ordre n sur $\mathbb{K}$ (où n est un entier strictement positif et $\mathbb{K}$ est un corps commutatif) ; c'est-à-dire l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, qui sont **inversibles**.
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$	Le spectre de f dans $\mathbb{K}$; c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de f qui appartiennent à $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et f est un endomorphisme d'un certain $\mathbb{K}$-espace vectoriel).
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$	Le spectre de A dans $\mathbb{K}$; c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A qui appartiennent à $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et A est une marice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$).

P_f	Le polynôme caractéristique de f (où f est un endomorphisme d'un certain espace vectoriel de dimension finie).
P_A	Le polynôme caractéristique de A (où A est une matrice carrée à coefficients dans un certain corps commutatif).
$A \sim B$	Les deux matrices carrées A et B (d'un même ordre n et à coefficients dans un même corps commutatif $\mathbb{K}$) sont semblables. C'est-à-dire que A et B représentent un même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ relativement à deux bases (distinctes ou identiques) de $\mathbb{K}^n$. Ceci équivaut à l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.
$E(\lambda)$	L'espace propre associé à une valeur propre λ de l'endomorphisme (ou de la matrice) en cours d'étude.
$\mathbf{m_a}(\lambda)$	La multiplicité algébrique d'une valeur propre λ de l'endomorphisme (ou de la matrice) en cours d'étude.
$\mathbf{m_g}(\lambda)$	La multiplicité géométrique d'une valeur propre λ de l'endomorphisme (ou de la matrice) en cours d'étude.
$\mathfrak{M}_f$	Le polynôme minimal d'un endomorphisme f d'un certain espace vectoriel de dimension fini.
$\mathfrak{M}_A$	Le polynôme minimal d'une matrice carrée A donnée.

Chapitre 1

Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Pour tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif (que l'on prend généralement égale à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On désigne aussi par n un entier strictement positif.

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1. *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé **valeur propre** de f s'il existe un vecteur **non nul** $\mathbf{x} \in E$ tel que :*

$$f(\mathbf{x}) = \lambda\, \mathbf{x}.$$

*Dans cette situation, on dira que $\mathbf{x}$ est un **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.*

Définition 1.2. *L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f de E s'appelle le **spectre** de f et on le note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$ ou tout simplement $\mathrm{Sp}(f)$ s'il n y a pas d'ambiguïté sur le corps commutatif $\mathbb{K}$.*

Exemple : Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Considérons $f = \frac{d}{dx}$ l'endomorphisme de dérivation sur E, soit

$$\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & E \\ & \mathbf{u} & \longmapsto & \mathbf{u}' \end{array}.$$

Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, considérons la fonction $\mathbf{u}(x) := e^{\lambda x}$. On a bien $\mathbf{u} \in E$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}_E$ et :

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}' = \lambda e^{\lambda x} = \lambda \mathbf{u}.$$

Ceci montre que λ est une valeur propre de f et que la fonction $\mathbf{u} : x \mapsto e^{\lambda x}$ est un vecteur propre associé à λ. Ainsi, tout nombre réel est une valeur propre de f. D'où :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \;=\; \mathbb{R}.$$

Le spectre de f est donc infini.

Remarque : Nous verrons bientôt que lorsque E est de dimension finie, le spectre de tout endomorphisme de E est fini.

On définit de façon similaire les valeurs propres et le spectre d'une matrice carrée. On a la

Définition 1.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une* ***valeur propre*** *de A s'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que :*

$$A\mathbf{x} \;=\; \lambda\mathbf{x}.$$

Dans cette situation, on dira que $\mathbf{x}$ est un ***vecteur propre*** *associé à la valeur propre λ.*
— L'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée A s'appelle le ***spectre*** *de A et on le note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ ou simplement $\mathrm{Sp}(A)$ s'il n' y a pas d'ambiguïté sur le corps commutatif $\mathbb{K}$.*

Exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On a bien $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ et $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\mathbf{x}$. Ceci montre que $\lambda = 5$ est une valeur propre de A et que $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

1.2 Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie

Lorsque l'espace vectoriel E est de dimension finie, il existe un moyen très pratique pour déterminer toutes les valeurs propres d'un endomorphisme donné de E. On a la

Proposition 1.4. *On suppose que E est de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est une valeur propre de f si et seulement si :*

$$\det\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E\right) \;=\; 0.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\lambda \text{ est une valeur propre de } f &\Longleftrightarrow \exists \mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{0}_E\} : \ f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} \\ &\Longleftrightarrow \exists \mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{0}_E\} : \ (f - \lambda \operatorname{Id}_E)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_E \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{\mathbf{0}_E\} \\ &\Longleftrightarrow (f - \lambda \operatorname{Id}_E) \text{ est non injectif} \\ &\Longleftrightarrow \det(f - \lambda \operatorname{Id}_E) = 0. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Remarque : Le développement du déterminant $\det(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ donne un polynôme en λ de degré $n = \dim E$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.5. *Supposons que E est de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. L'expression $\det(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ s'appelle **le polynôme caractéristique** de f et on la note $P_f(\lambda)$.*

En adjoignant la proposition 1.4 et la remarque qui la suit à la définition 1.5, on aboutit au corollaire immédiat suivant :

Corollaire 1.6. *On suppose que E est de dimension finie n. Alors les valeurs propres d'un endomorphisme f de E sont les racines de son polynôme caractéristique P_f.*
De plus, tout endomorphisme de E possède au maximum n valeurs propres dans $\mathbb{K}$. $\blacksquare$

Les analogues de la définition 1.5 et du corollaire 1.6 pour les matrices s'énoncent de la façon évidente que voici :

Définition 1.5′. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'expression $\det(A - \lambda \mathrm{I}_n)$ s'appelle **le polynôme caractéristique** de A et on la note $P_A(\lambda)$.*

Corollaire 1.6′. *Les valeurs propres d'une matrice carrée A sont les racines de son polynôme caractéristique P_A.*
De plus, toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au maximum n valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

Exemple : On reprend la matrice déjà vue dans l'exemple d'avant, soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Cherchons toutes les valeurs propres réelles [(1)] de A :
Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned}P_A(\lambda) := \det(A - \lambda \mathrm{I}_2) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)(1-\lambda) - 3 \times 4 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 10.\end{aligned}$$

(1). On a déjà vu dans l'exemple d'avant que le nombre réel 5 est une valeur propre de A mais on ne sait pas si c'est la seule valeur propre de A ou non.

Les calculs montrent que les racines de P_A sont $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = -2$. Les valeurs propres de A sont donc 5 et -2.

1.3 Matrices semblables

Définition 1.7. *Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites* ***semblables****, et on écrit $A \sim B$, s'il existe deux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{K}^n$ tel que l'endomorphisme associé à A relativement à $\mathscr{B}_1$ soit* ***identique*** *à l'endomorphisme associé à B relativement à $\mathscr{B}_2$.*
Plus simplement, A et B sont semblables si elles représentent le ***même endomorphisme*** *relativement à deux bases (différentes ou identiques) de $\mathbb{K}^n$.*

La formule matricielle qui caractérise la semblance de deux matrices carrées de même ordre est fournie par la proposition suivante :

Proposition 1.8. *Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que :*

$$B = P^{-1}AP.$$

Démonstration.
• Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que $A \sim B$. Il existe donc (par définition même) deux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{K}^n$ tel que l'endomorphisme associé à A relativement à $\mathscr{B}_1$ soit identique à l'endomorphisme associé à B relativement à $\mathscr{B}_2$. Appelons f cet endomorphisme commun et P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_1$ à la base $\mathscr{B}_2$ (donc P est inversible). On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{K}^n, \mathscr{B}_2) & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}} & (\mathbb{K}^n, \mathscr{B}_1) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{K}^n, \mathscr{B}_1) & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}} & (\mathbb{K}^n, \mathscr{B}_2) \\ & P & & A & & P^{-1} & \end{array}.$$

Ce diagramme montre que la matrice associée à l'endomorphisme composé $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n} \circ f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n} = f$ est $P^{-1}AP$. Mais par ailleurs, on sait que cette matrice n'est rien d'autre que B. D'où l'égalité :

$$B = P^{-1}AP.$$

• Inversement, supposons qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Considérons $\mathscr{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B}_2$ la base de $\mathbb{K}^n$, constituée des vecteurs colonnes de P (de sorte que P soit la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_1$ vers la base $\mathscr{B}_2$). Appelons f l'endomorphisme de K^n associé à la matrice A relativement à la base $\mathscr{B}_1$. Le même diagramme ci-dessus montre que l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé à la matrice B relativement à la base $\mathscr{B}_2$ est $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n} \circ f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n} = f$, qui est bien le même que l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé à A relativement à la base $\mathscr{B}_1$. Ce qui entraîne que les deux matrices A et B sont semblables. ■

Exercice : Montrer que la relation $\sim$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.

Les matrices semblables ont beaucoup de points en communs. Parmi ces points le polynôme caractéristique et les valeurs propres. On a la

Proposition 1.9. *Deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont le même polynôme caractéristique et les mêmes valeurs propres.*

Démonstration. Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ces matrices A et B représentent donc un même endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ (relativement à deux bases bien choisies de $\mathbb{K}^n$). On a par conséquent $P_f = P_A$ et $P_f = P_B$. D'où $P_A = P_B$. Enfin, comme les valeurs propres de A sont les zéros de P_A et les valeurs propres de B sont les zéros de P_B (en vertu du corollaire 1.6′), on a bien $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$. ■

Remarque : On peut démontrer la proposition 1.9 en utilisant plutôt la relation matricielle caractérisant la semblance de deux matrices carrée (i.e., la relation fournie par la proposition 1.8). En effet, soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que : $B = P^{-1}AP$. On a par suite :

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathrm{I}_n) &= \det\left(P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda \mathrm{I}_n)P\right) \\ &= \det\left(P^{-1}(A - \lambda \mathrm{I}_n)P\right) = \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda \mathrm{I}_n) \cdot \det P \\ &= \frac{1}{\det P} \cdot \det(A - \lambda \mathrm{I}_n) \cdot \det P = \det(A - \lambda \mathrm{I}_n) = P_A(\lambda). \end{aligned}$$

Ce qui montre que les deux matrices A et B ont le même polynôme caractéristique. Elles ont donc aussi (en vertu du corollaire 1.6′) les mêmes valeurs propres.

1.4 Deux coefficients importants du polynôme caractéristique

Définition 1.10. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A, que l'on note $\mathrm{tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A ; soit*

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Proposition 1.11. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A s'écrit :*

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \mathrm{tr}(A) \lambda^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

Démonstration. Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Par définition même, on a

$$P_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda \mathrm{I}_n\right) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Le développement de ce déterminant [(2)] montre que les deux premiers coefficients de P_A (c'est-à-dire les coefficients de λ^n et de λ^{n-1} dans P_A) proviennent du polynôme $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$; ce sont donc respectivement $(-1)^n$ et $(-1)^{n-1} \left(a_{11} + \cdots + a_{nn}\right) = (-1)^{n-1} \mathrm{tr}(A)$.
Par ailleurs, le coefficient constant de P_A est $P_A(0) = \det(A - 0 \cdot \mathrm{I}_n) = \det(A)$. La proposition est démontrée. ■

Cas particulier ($n = 2$) :
Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, P_A est un polynôme de second degré et ne possède donc que trois coefficients. Ces coefficients sont tous connus (en vertu de la proposition 1.11) et on obtient :

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Nous tirons de la proposition 1.11 le corollaire suivant :

Corollaire 1.12. *Deux matrices carrées semblables ont la même trace.*

Démonstration. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A \sim B$. D'après la proposition 1.9, on a $P_A = P_B$. Ceci entraîne que P_A et P_B ont les mêmes coefficients. En particulier, le coefficient de λ^{n-1} dans P_A est égale au coefficient de λ^{n-1} dans P_B. Ce qui donne (en vertu de la proposition 1.11) $(-1)^{n-1}\mathrm{tr}(A) = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(B)$. D'où $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$, comme il fallait le prouver. ■

Nous déduisons du corolaire 1.12 que la notion de **trace** est liée à un endomorphisme plutôt qu'à une matrice et on peut introduire la

(2). Rappelons que le développement du déterminant d'une matrice carrée $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est donné par la formule : $\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)}$, où S_n désigne le groupe symétrique d'ordre n.

Définition 1.13. *Etant donné f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, on appelle* ***trace*** *de f, que l'on note $\mathrm{tr}(f)$, la trace d'une matrice associée à f relativement à une base quelconque de E.*

Exercices

Exercice 1.1. Déterminer les valeurs propres réelles de la matrice carrée d'ordre 2 :

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

— Déterminer les vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres.

Exercice 1.2. Soit A la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -10 & 4 & 4 \\ -6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Calculer le polynôme caractéristique de f.

2) En déduire les valeurs propres de f et les vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres.

3) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$, constituée de vecteurs propres de f. On notera P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathscr{B}$.

4) Ecrire la matrice D associée à f relativement à la base $\mathscr{B}$.
De quelle nature est D ?

5) Ecrire la relation matricielle reliant A et D.
Que peut-on dire de A et D ?

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de n.

Exercice 1.3. Pour ce qui suit, on notera $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, d'indéterminée X et de degré ≤ 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ donné par :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P(X) & \longmapsto & P(X) + (X+1)P'(X) \end{array}$$

1) Justifier rapidement que f est bien défini.

2) Déterminer toutes les valeurs propres de f ainsi que les vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres.

Exercice 1.4. Soit A la matrice carrée d'ordre n ($n \geq 2$) suivante :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

— Juste par observation, déterminer deux valeurs propres distinctes de A (on ne vous demande pas de calculer le polynôme caractéristique de A).

Exercice 1.5. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme *involutif* de E ; autrement dit, f est un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \mathrm{Id}_E$. On suppose que $f \neq \mathrm{Id}_E$ et que $f \neq -\mathrm{Id}_E$.
— Montrer que 1 et -1 sont des valeurs propres de f.

Exercice 1.6. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f et g deux endomorphismes de E.
— Montrer que les deux endomorphismes $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.
☞ Distinguer les deux cas : $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$.

Exercice 1.7. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB - BA = A \qquad (*)$$

Le but de cet exercice est de montrer que A est nilpotente ; c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = (0)$.
On considère ϕ l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$

1) Montrer rapidement que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer par récurrence que l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\phi(A^k) = kA^k.$$

3) Conclure que A est nilpotente.

Cas de la dimension infinie

Exercice 1.8 (**Rattrapage de l'année 2013-2014**).
Soit f l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, défini par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & f(P) := P + P' + P'' + \cdots \end{array} .$$

1) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (i.e. f est bijectif) tout en explicitant son endomorphisme inverse f^{-1}.

2) Montrer que $\lambda = 1$ est une valeur propre de f.

3) Montrer que f ne possède pas d'autres valeurs propres réelles, autre la valeur propre $\lambda = 1$.

Exercice 1.9. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, défini par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & \varphi(P)(X) := P(X) + 2XP'(X) \end{array} .$$

— Déterminer le spectre de φ.

*
* *

Chapitre 2

Diagonalisation des endomorphismes en dimension finie

Pour tout ce qui suit, on fixe $\mathbb{K}$ un corps commutatif (on pense à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), n un entier strictement positif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Réduire un endomorphisme f de E c'est trouver une base de E suivant laquelle f est représenté par une matrice relativement simple, c'est-à-dire une matrice possédant beaucoup de zéros. Dans beaucoup de cas, une réduction qui amène à représenter l'endomorphisme en question par une matrice diagonale est possible. Dans ce cas, on parlera d'une **diagonalisation**.

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1. *Un endomorphisme f de E est dit* ***diagonalisable*** *s'il existe une base $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ de E telle que la matrice associée à f relativement à $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ soit* ***diagonale****, c'est-à-dire de la forme :*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$).

La version matricielle de cette définition est la suivante :

Définition 2.2. *Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite* ***diagonalisable*** *si elle est semblable à une matrice* ***diagonale*** *; autrement dit, s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ tel que la matrice $P^{-1}AP$ soit* ***diagonale****.*

Nous commençons par la proposition facile suivante :

Proposition 2.3. *Un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E qui soit constituée de vecteurs propres de f.*

Démonstration. Soit f un endomorphisme de E.
• Supposons que f est diagonalisable. Il existe donc une base $\mathscr{B} = (V_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E suivant laquelle f est représenté par une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$). Par définition même de la matrice associée à un endomorphisme, on a :

$$f(V_1) = \lambda_1 V_1 \ , \ f(V_2) = \lambda_2 V_2 \ , \ \dots \ , \ f(V_n) = \lambda_n V_n.$$

Ces égalités montrent que les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des valeurs propres de f et que les vecteurs $V_1, \dots, V_n$ en sont respectivement des vecteurs propres associés. D'où $\mathscr{B} = (V_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f.
• Inversement, supposons qu'il existe une base $\mathscr{B} = (V_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E qui soit constituée de vecteurs propres de f. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ les valeurs propres associées respectivement aux vecteurs propres $V_1, \dots, V_n$ de f. On a donc :

$$f(V_1) = \lambda_1 V_1 \ , \ \dots \ , \ f(V_n) = \lambda_n V_n.$$

Il s'ensuit de ces égalités que la matrice associée à f relativement à la base $\mathscr{B} = (V_i)_{1 \leq i \leq n}$ est

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

qui est visiblement diagonale. Ce qui montre que f est diagonalisable. La démonstration est achevée. ■

Nous enchaînons avec les deux définitions équivalentes suivantes :

Définition 2.4. *Soit f un endomorphisme de E.* ***Diagonaliser*** *f signifie « trouver une base de E suivant laquelle la matrice associée à f soit* ***diagonale*** *». D'après la proposition 2.3, ceci est équivalent à trouver une base de E qui soit constituée de* ***vecteurs propres*** *de f.*

Définition 2.5. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.* ***Diagonaliser*** *$A$ signifie « trouver une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP$ soit* ***diagonale*** *». D'après la proposition 2.3, ceci est équivalent à trouver une base de $\mathbb{K}^n$ qui soit constituée de* ***vecteurs propres*** *de A.*
Dans cette situation, la matrice P n'est rien d'autre que la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ vers la nouvelle base trouvée (constituée de vecteurs propres de A).

Remarque : Il existe des endomorphismes (resp. des matrices carrée) non diagonalisables. En voici un exemple :

Exemple : La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est non diagonalisable. Nous allons, en effet, montrer ceci par deux méthodes différentes :
Première méthode : Un simple calcul montre que l'unique valeur propre de A est $\lambda_1 = 1$ et que les vecteurs propres associés à cette valeur propre sont tous colinéaires au vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il n'existe donc aucune base de $\mathbb{K}^2$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) qui soit constituée de vecteurs propres de A. Ce qui montre que A n'est pas diagonalisable.
Seconde méthode : Procédons par l'absurde en supposant que A est diagonalisable. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Les éléments diagonaux de $P^{-1}AP$ sont forcément des valeurs propres de A (voir la démonstration de la proposition 2.3) et sont donc tous égaux à $\lambda_1 = 1$ (qui est l'unique valeur propre de A). D'où $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2$. Ce qui entraîne $A = P\mathrm{I}_2P^{-1} = \mathrm{I}_2$. Ce qui est absurde (puisque A est visiblement différente de I_2). D'où A n'est pas diagonalisable.

2.2 Espaces propres et caractérisation des endomorphismes diagonalisables

La diagonalisabilité d'un endomorphisme f de E dépend des dimensions de certains espaces vectoriels liés à f, que l'on nomme « espaces propres » et qui font l'objet d'étude de cette section.

Définition 2.6. *Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f. On définit* ***l'espace propre*** *associé à λ comme étant le sous-espace vectoriel de E, noté $E(\lambda)$, et défini par :*

$$E(\lambda) := \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E).$$

L'analogue de cette définition pour les matrices carrées est évident.

Remarques :

1. L'espace propre associé à une valeur propre λ d'un endomorphisme f de E n'est rien d'autre que l'ensemble de tous les vecteurs propres de f associés à λ, auquel on adjoint le vecteur nul $\mathbf{0}_E$.
2. Un espace propre est toujours de dimension ≥ 1 (car il contient au moins un vecteur propre, qui est un vecteur non nul).

Nous passons maintenant à étudier quelques théorèmes sur les espaces propres.

Théorème 2.7. *Soient f un endomorphisme de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ($p \geq 2$) des valeurs propres deux-à-deux distinctes de f. Alors la somme :*

$$E(\lambda_1) + E(\lambda_2) + \cdots + E(\lambda_p)$$

est directe.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur p.
• Pour $p = 2$: Il s'agit simplement de montrer que $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \{\mathbf{0}_E\}$. Comme l'inclusion $\{\mathbf{0}_E\} \subset E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2)$ est banale (car $E(\lambda_1)$ et $E(\lambda_2)$ sont des sous-espaces vectoriels de E, donc contiennent le vecteur nul de E), alors il reste à montrer l'inclusion $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) \subset \{\mathbf{0}_E\}$. Soit $\mathbf{x} \in E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2)$. On a donc $\mathbf{x} \in E(\lambda_1)$ et $\mathbf{x} \in E(\lambda_2)$; ce qui équivaut à :

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \mathbf{x} \ \text{ et } \ f(\mathbf{x}) = \lambda_2 \mathbf{x}.$$

D'où l'on déduit que $\lambda_1 \mathbf{x} = \lambda_2 \mathbf{x}$, ce qui entraîne $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}_E$. Mais puisque $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ (car $\lambda_1 \neq \lambda_2$), on conclut que $\mathbf{x} = \mathbf{0}_E$. D'où l'inclusion $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) \subset \{\mathbf{0}_E\}$ et puis l'égalité $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \{\mathbf{0}_E\}$. La somme $E(\lambda_1) + E(\lambda_2)$ est par conséquent directe.
• Soit $p \geq 3$: Supposons que la somme $E(\lambda_1) + \cdots + E(\lambda_{p-1})$ est directe et montrons que la somme $E(\lambda_1) + \cdots + E(\lambda_p)$ est aussi directe. Cela revient à montrer que :

$$\forall \mathbf{x}_1 \in E(\lambda_1)\ ,\ \forall \mathbf{x}_2 \in E(\lambda_2)\ ,\ \dots\ ,\ \forall \mathbf{x}_p \in E(\lambda_p) :$$
$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_p = \mathbf{0}_E \Longrightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \cdots = \mathbf{x}_p = \mathbf{0}_E \quad (\star)$$

Soit alors $\mathbf{x}_1 \in E(\lambda_1)$, $\mathbf{x}_2 \in E(\lambda_2)$, …, $\mathbf{x}_p \in E(\lambda_p)$ tels que :

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_p = \mathbf{0}_E \tag{2.1}$$

Pour tout $i = 1 \dots p$, on a $f(\mathbf{x}_i) = \lambda_i \mathbf{x}_i$ (puisque $\mathbf{x}_i \in E(\lambda_i)$). En appliquant donc l'endomorphisme f aux deux membres de l'égalité (2.1), on obtient (compte tenu de la linéarité de f) :

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p = \mathbf{0}_E \tag{2.2}$$

En multipliant les deux membres de l'équation (2.1) par λ_p puis en soustrayant (membre à membre) l'équation obtenue de l'équation (2.2), on obtient :

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_p)\,\mathbf{x}_1}_{\in E(\lambda_1)} + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_p)\,\mathbf{x}_2}_{\in E(\lambda_2)} + \cdots + \underbrace{(\lambda_{p-1} - \lambda_p)\,\mathbf{x}_{p-1}}_{\in E(\lambda_{p-1})} = \mathbf{0}_E.$$

Comme la somme $E(\lambda_1) + \cdots + E(\lambda_{p-1})$ est supposée directe (c'est notre hypothèse de récurrence), la dernière equation entraîne que :

$$(\lambda_1 - \lambda_p)\,\mathbf{x}_1 = (\lambda_2 - \lambda_p)\,\mathbf{x}_2 = \cdots = (\lambda_{p-1} - \lambda_p)\,\mathbf{x}_{p-1} = \mathbf{0}_E.$$

Mais puisque les scalaires $(\lambda_1 - \lambda_p)$, $(\lambda_2 - \lambda_p)$, …, $(\lambda_{p-1} - \lambda_p)$ sont tous non nuls (car $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont deux à deux distincts), on en conclut que :

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \cdots = \mathbf{x}_{p-1} = \mathbf{0}_E.$$

En substituant ceci dans (2.1), on obtient $\mathbf{x}_p = \mathbf{0}_E$. La propriété $(\star)$ est ainsi démontrée et la somme $E(\lambda_1) + \cdots + E(\lambda_p)$ est par conséquent directe. Ceci achève cette récurrence et cette démonstration. ■

La caractérisation des endomorphismes diagonalisables, qui va être donnée au théorème 2.12, dépend de deux paramètres que l'on associe à chaque valeur propre de l'endomorphisme en question. Il s'agit de la *multiplicité algébrique* et de la *multiplicité géométrique* d'une valeur propre qui sont définies par :

Définition 2.8. *Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.*

• *On définit la* ***multiplicité algébrique*** *de λ, que l'on note $\mathbf{m_a}(\lambda)$, comme étant la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique P_f de f.*

• *On définit la* ***multiplicité géométrique*** *de λ, que l'on note $\mathbf{m_g}(\lambda)$, comme étant la dimension de l'espace propre $E(\lambda)$ associé à λ.*

On a le théorème suivant :

Théorème 2.9. *Soit f un endomorphisme de E. Alors pour toute valeur propre λ de f, on a :*
$$\mathbf{m_g}(\lambda) \;\leq\; \mathbf{m_a}(\lambda).$$

Démonstration. Soit λ une valeur propre de f. Posons $k := \mathbf{m_a}(\lambda)$ et $\ell := \mathbf{m_g}(\lambda)$. Il s'agit donc de montrer que $k \geq \ell$. On considère $(V_1, \dots, V_\ell)$ une base de $E(\lambda)$ que l'on complète pour obtenir une base $\mathscr{B} = (V_1, \dots, V_\ell, V_{\ell+1}, \dots, V_n)$ de E. Pour tout $i = 1, \dots, , \ell$, on a $V_i \in E(\lambda)$ et donc $f(V_i) = \lambda V_i$. La matrice A associée à f relativement à $\mathscr{B}$ s'écrit donc sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{I}_\ell & M_1 \\ (\mathbf{0}) & M_2 \end{pmatrix},$$

avec $M_1 \in \mathcal{M}_{\ell,(n-\ell)}(\mathbb{K})$ et $M_2 \in \mathcal{M}_{(n-\ell),(n-\ell)}(\mathbb{K})$. En se servant de cette décomposition de A en blocs, on a :

$$\begin{aligned} P_f(x) \;=\; P_A(x) &= \det(A - x\,\mathrm{I}_n) \\ &= \det\begin{pmatrix} (\lambda - x)\,\mathrm{I}_\ell & M_1 \\ (\mathbf{0}) & M_2 - x\,\mathrm{I}_{(n-\ell)} \end{pmatrix} \\ &= \det\left((\lambda - x)\,\mathrm{I}_\ell\right) \cdot \det\left(M_2 - x\,\mathrm{I}_{(n-\ell)}\right) \\ &= (\lambda - x)^\ell \cdot P_{M_2}(x) \\ &= (-1)^\ell (x - \lambda)^\ell P_{M_2}(x). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité montre que la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique P_f de f est au moins égale à ℓ ; autrement dit $k \geq \ell$. Ce qui complète cette démonstration. ■

Afin d'alléger l'énoncé du théorème fondamental caractérisant les endomorphismes diagonalisables, nous avons besoin d'introduire la notion de "polynômes scindés" qui est une notion très importante de l'algèbre polynômiale.

Définition 2.10. *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.*
*On dit que P est **scindé** sur $\mathbb{K}$ s'il est possible de décomposer P en produit*

de polynômes de premier degré de $\mathbb{K}[X]$.
De façon équivalente, P *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *si le nombre de racines de* P *qui appartiennent à* $\mathbb{K}$ *et que l'on compte avec leurs multiplicités est exactement égale à* $\deg P$.

Convention : On conventionne que les polynômes constants sont scindés sur n'importe quel corps commutatif qui contient leurs coefficients.

Remarques :

1. Un polynôme peut ne pas être scindé sur un corps et être scindé sur un autre corps plus grand. Par exemple, le polynôme $P(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (car il est de degré 2 et ne possède aucune racine réelle) mais il est scindé sur $\mathbb{C}$ (puisqu'il se décompose en $P(X) = (X+i)(X-i)$).
2. On vérifie immédiatement que le produit de polynômes scindés sur $\mathbb{K}$ donne un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$. Mais attention, la somme de polynômes scindés sur $\mathbb{K}$ peut donner un polynôme non scindé sur $\mathbb{K}$. Pour s'en convaincre, soit $P(X) = X^2$ et $Q(X) = X + 1$. Il est claire que P et Q sont scindés sur $\mathbb{R}$ mais que $(P + Q)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Signalons aussi l'important résultat de l'analyse réelle qui affirme que la propriété « d'être scindé », pour un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, est stable par dérivation. On propose plus précisément l'exercice suivant :

Exercice : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
— Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ alors P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$ (par récurrence, on obtient que $P^{(k)}$ est aussi scindé sur $\mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$).
☞ Utiliser le théorème de Rolle.

La notion de polynômes scindés apparaît aussi dans le théorème fondamental de l'algèbre que nous rappelons ici :

Le théorème fondamental de l'algèbre (appelé aussi « le théorème de d'Alembert(1)-Gauss(2) »).
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ *est scindé sur* $\mathbb{C}$.
Autrement dit, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ *de degré* k *(*$k \in \mathbb{N}$*) possède exactement* k *racines complexes comptées avec leurs ordres de multiplicité.*

(1). Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) : Mathématicien, philosophe et encyclopédiste français.
(2). Carl Friedrich Gauss (1777–1855) : Mathématicien, physicien et astronome allemand.

On voit ainsi que la propriété d'être scindé pour un polynôme, qui est importante sur le corps des nombres réels, n'a aucune importance sur le corps des nombres complexes !

Définition 2.11. *On dit d'un corps commutatif $\mathbb{K}$ qui vérifie la propriété :*

$$\ll \textit{Tout polynôme de } \mathbb{K}[X] \textit{ est scindé sur } \mathbb{K} \gg$$

*qu'il est **algébriquement clos**.*

Le théorème fondamental de l'algèbre affirme donc simplement que « le corps commutatif $\mathbb{C}$ est algébriquement clos ».
Lorsqu'un corps commutatif $\mathbb{K}$ n'est pas algébriquement clos (ce qui revient à dire qu'il existe des équations polynômiales non triviales qui n'ont pas de solution dans $\mathbb{K}$, comme c'est le cas de $\mathbb{R}$), il est toujours possible de le plonger (i.e., de l'inclure) dans un corps commutatif plus grand qui soit algébriquement clos. Cet important résultat s'appelle « le théorème de Steinitz » :

Le théorème de Steinitz(3).
Tout corps commutatif $\mathbb{K}$ peut être plongé dans un corps commutatif plus grand $\mathbb{K}'$ qui soit algébriquement clos.

N.B : La démonstration du théorème de Steinitz ci-dessus dépasse de loin le cadre que nous avons réservé à ce polycopié. Elle relève de la théorie moderne des corps commutatifs dont Steinitz est l'un des fondateur et ce via son article majeur de 1910.

Nous somme maintenant prêts à énoncer le théorème fondamental de ce chapitre qui caractérise de façon simple les endomorphismes diagonalisables.

Théorème 2.12 (fondamental)**.** *Soit f un endomorphisme de E. Alors f est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

i) *Le polynôme caractéristique P_f de f est scindé sur $\mathbb{K}$.*

ii) *Pour toute valeur propre λ de f, on a : $\mathbf{m_a}(\lambda) = \mathbf{m_g}(\lambda)$.*

Démonstration.
• Supposons que f est diagonalisable et montrons que f satisfait les deux conditions i) et ii) du théorème. Par supposition, il existe une base $\mathscr{B}$ de

(3). Ernst Steinitz (1871-1928) : Mathématicien allemand.

E suivant laquelle la matrice associée à f est diagonale, c'est-à-dire qu'elle s'écrit sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$). Il s'ensuit que l'on a :

$$\begin{aligned} P_f(x) = P_D(x) = \det\left(D - x\,\mathrm{I}_n\right) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & \lambda_n - x \end{pmatrix} \\ = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)\,. \end{aligned}$$

On voit bien que P_f est un produit de polynômes de premier degré de $\mathbb{K}[x]$. Ce qui montre que P_f est scindé sur $\mathbb{K}$. La condition i) du théorème est ainsi vérifiée.
Montrons maintenant que f satisfait la condition ii) du théorème. Soient λ une valeur propre arbitraire de f et k sa multiplicité algébrique. Par définition de k, il existe $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, tous distincts, tels que : $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \dots = \lambda_{i_k} = \lambda$ et $\lambda_i \neq \lambda$ pour $i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. On a donc :

$$\begin{aligned} E(\lambda) = \mathrm{Ker}\left(D - \lambda\,\mathrm{I}_n\right) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n :\ (D - \lambda\,\mathrm{I}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n :\ \left\{ \begin{array}{lcl} (\lambda_1 - \lambda) x_1 & = & 0 \\ \vdots & & \\ (\lambda_n - \lambda) x_n & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n :\ x_i = 0 \ \text{ pour } \ i \notin \{i_1, \dots, i_k\} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\right) \end{aligned}$$

(où l'on a noté $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$). Ceci entraîne que $\dim E(\lambda) = k$, c'est-à-dire $\mathbf{m_g}(\lambda) = \mathbf{m_a}(\lambda)$, comme il fallait le prouver. La condition ii) du théorème est donc satisfaite.

• Inversement, supposons que les deux condition i) et ii) du théorème sont remplies et montrons que f est diagonalisable. Notons par $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) les valeurs propres deux à deux distinctes de f et par $k_1, \dots, k_p$ leurs multiplicités algébriques respectives. Le nombre de racines (dans $\mathbb{K}$) du polynôme

P_f, comptées avec leurs ordres de multiplicité, est donc égale à $(k_1+\dots+k_p)$. Mais puisque P_f est supposé scindé sur $\mathbb{K}$, ce même nombre est aussi égale à $\deg P_f = n$; d'où :

$$k_1 + \dots + k_p \ = \ n.$$

Par ailleurs, d'après la condition ii) du théorème, on a :

$$\dim E(\lambda_i) \ = \ k_i \qquad \text{pour tout } i = 1, \dots, p.$$

Enfin, d'après le théorème 2.7, la somme $E(\lambda_1) + \dots + E(\lambda_p)$ est directe. Il s'ensuit de tout cela que :

$$\begin{aligned}\dim\left(E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_p)\right) = \dim E(\lambda_1) + \dots + \dim E(\lambda_p) &= k_1 + \dots + k_p \\ &= n = \dim E.\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que l'on a :

$$E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_p) \ = \ E.$$

Ainsi, en considérant une base $\mathscr{B}_i$ pour chaque espace propre $E(\lambda_i)$, la famille $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \dots \cup \mathscr{B}_p$ sera une base de E constituée de vecteurs propres de f (puisque chaque $\mathscr{B}_i$ est constituée de vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ_i). Ce qui conclut (en vertu de la proposition 2.3) que f est diagonalisable, comme il fallait le prouver. La démonstration est achevée. ∎

Le corollaire suivant est presque immédiat mais il est très important.

Corollaire 2.13. *Soit f un endomorphisme de E. Si le polynôme caractéristique P_f de f est scindé sur $\mathbb{K}$ et ne possède que des racines simples alors f est diagonalisable.*

Démonstration. Il faut et il suffit de montrer que les deux conditions du théorème 2.12 sont satisfaites. Concernant la condition i), elle est satisfaite par hypothèse même. Montrons que la condition ii) est aussi satisfaite. Etant donnée une valeur propre λ de f, on a d'une part : $\mathbf{m_g}(\lambda) = \dim E(\lambda) \geq 1$ et d'autre part (en vertu du théorème 2.9) : $\mathbf{m_g}(\lambda) \leq \mathbf{m_a}(\lambda) = 1$. D'où l'on conclut que $\mathbf{m_g}(\lambda) = 1 = \mathbf{m_a}(\lambda)$. Comme ceci étant vrai pour toute valeur propre λ de f, la condition ii) du théorème 2.12 est bien satisfaite. L'endomorphisme f est donc diagonalisable. Ce qui achève cette démonstration. ∎

Le théorème suivant ne diffère que de peu du théorème fondamental 2.12 et fournit, comme ce dernier, une caractérisation des endomorphismes diagonalisables. Sa démonstration (laissée au lecteur) utilise la proposition 2.3 et le théorème 2.7 comme elle pourrait être déduite du théorème 2.12 et de sa démonstration.

Théorème 2.14. *Soient f un endomorphisme de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) les valeurs propres deux à deux distinctes de f. Alors f est diagonalisable si et seulement si l'on a :*

$$E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_p) \;=\; E. \qquad \blacksquare$$

2.3 Calcul de la puissance $k^{\text{ème}}$ d'une matrice diagonalisable

La plus importante application de la diagonalisation des endomorphismes (resp. des matrices) est le calcul de la puissance $k^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme (resp. d'une matrice).

Soit A une matrice *diagonalisable* d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour calculer A^k en fonction de k ($k \in \mathbb{N}^*$), on procède comme suit :

• On diagonalise A ; ce qui consiste à :

— Calculer le polynôme caractéristique de A.

— Déterminer les valeurs propres de A, qui sont les racines de P_A.

— Déterminer les espaces propres de A en précisant une base pour chacun d'entre eux. La réunion de toutes ces bases donnera une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$, constituée de vecteurs propres de A.

— Ecrire P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathscr{B}$.

• Notons par f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé à la matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Puisque $\mathscr{B}$ est constituée de vecteurs propres de A (donc de f), la matrice associée à f relativement à $\mathscr{B}$ s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres de A (donc de f). D'autre part, on a (d'après la formule de changement de base) :

$$D \;=\; P^{-1}AP.$$

D'où l'on tire :

$$A \;=\; PDP^{-1}.$$

On a par suite :

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\cancel{P^{-1}}\cancel{P}DP^{-1} = PD^2P^{-1},$$
$$A^3 = A^2A = (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2\cancel{P^{-1}}\cancel{P}DP^{-1} = PD^3P^{-1}, \quad \dots \text{ etc.}$$

Plus généralement, on montre par une simple récurrence que l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$A^k \;=\; PD^kP^{-1} \tag{$\star$}$$

Enfin, comme on a visiblement :

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \qquad (\forall k \in \mathbb{N}^*),$$

le calcul de A^k en fonction de k découle de la formule $(\star)$.

☞ Pour des applications numériques, voir les exercices 2.1, 2.2 et 2.3.

Exercices

Exercice 2.1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés de chacune des matrices réelles suivantes puis diagonaliser (sur $\mathbb{R}$) celles qui sont diagonalisables.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} ; \qquad B := \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} ;$$

$$C := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 2.2. Etudier la diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$ de la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 2.3. Diagonaliser sur $\mathbb{R}$, si c'est possible, la matrice suivante :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Exercice 2.4. Soient $n \geq 2$ un entier et J la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$J := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} .$$

1) Montrer (sans calculer le polynôme caractéristique de J) que les nombres 0 et n sont des valeurs propres de J.

2) Déterminer les espaces propres $E(0)$ et $E(n)$ associés à ces valeurs propres. Calculer $\dim E(0)$ et $\dim E(n)$.

3) Montrer que J est diagonalisable et en déduire les multiplicités algébriques des deux valeurs propres 0 et n de J et enfin l'expression du polynôme caractéristique de J.

4) Diagonaliser J.

Exercice 2.5. Soit $n \geq 2$ un entier. On note par $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, d'indéterminée X et de degré $\leq n$.
— Montrer que l'endomorphisme de dérivation $\frac{d}{dX}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.6. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un projecteur de E (c'est-à-dire un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = f$, avec $f \neq 0$ et $f \neq \mathrm{Id}_E$).

1) Montrer que 0 et 1 sont des valeurs propres de f.

2) Montrer que $E(0) = \mathrm{Ker} f$ et que $E(1) = \mathrm{Im} f$.

3) En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 2.7. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($n \geq 2$). Soit f un endomorphisme de E possédant n valeurs propres deux-à-deux distinctes.

1) Montrer qu'il existe $x \in E$ pour lequel la famille $\big(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{(n-1)}(x)\big)$ constitue une base de E.

2) Ecrire la forme de la matrice associée à f relativement à cette base.

Exercice 2.8. Soient $n \geq 3$ un entier et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres complexes avec $a_2 \neq 0$. On pose $b_n := a_2^2 + \dots + a_n^2$. On considère A_n la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$A_n := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que le polynôme caractéristique de A_n est donné par :

$$P_A(\lambda) = (-\lambda)^{n-2}(\lambda^2 - a_1\lambda - b_n).$$

2) Montrer que la matrice A_n est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si et seulement si $b_n \neq 0$ et $a_1^2 + 4b_n \neq 0$.

Exercice 2.9 (Matrices circulaires). Soient n un entier strictement positif et $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ des nombres complexes. On considère A la matrice définie par :

$$A := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}.$$

— Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 2.10. Pour tout entier strictement positif n, on considère A_n la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$A_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \mathbf{(0)} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{(0)} & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note par P_n le polynôme caractéristique de A_n.

1) Pour tout $n \geq 3$, exprimer P_n en fonction de P_{n-1} et P_{n-2}.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, on a :

$$P_n(-2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n possède n racines réelles deux à deux distinctes appartenant à l'intervalle $[-2, 2]$.

4) Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

*
*   *

Chapitre 3

Trigonalisation des endomorphismes en dimension finie

Pour tout ce qui suit, on fixe $\mathbb{K}$ un corps commutatif (on pense à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

3.1 Préliminaires

Définition 3.1. *Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **triangulaire supérieure** si :*

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pour tous } i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ tels que } i > j.$$

*Elle est dite **triangulaire inférieure** si :*

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pour tous } i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ tels que } i < j.$$

N.B : Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une certaine matrice triangulaire inférieure et vice-versat (4).

Pour fixer les idées, nous avons préféré de ne travailler par la suite qu'avec les matrices triangulaires **supérieures**. Le choix des matrices triangulaires inférieures est bien sûr aussi possible et ces deux choix sont équivalents en vertu de la note ci-dessus.

(4). En effet, un endomorphisme représenté par une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) relativement à une certaine base sera représenté par une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) relativement à une nouvelle base que l'on obtient en inversant l'ordre des vecteurs de la première base.

Définition 3.2. *Un endomorphisme f de E est dit* ***trigonalisable*** *s'il existe une base $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E suivant laquelle la matrice représentant f soit* ***triangulaire supérieure****.*

La version matricielle de cette définition est la suivante :

Définition 3.3. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite* ***trigonalisable*** *si elle est* ***semblable*** *à une matrice* ***triangulaire supérieure*** *; autrement dit, s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP$ soit* ***triangulaire supérieure****.*

Nous expliquons maintenant ce que nous appelons « trigonalisation » d'un endomorphisme ou d'une matrice.

Définition 3.4.
• ***Trigonaliser*** *un endomorphisme f de E signifie « trouver une base $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E suivant laquelle la matrice représentant f soit* ***triangulaire supérieure*** *».*
• ***Trigonaliser*** *une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ signifie « trouver une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP$ soit* ***triangulaire supérieure*** *».*

3.2 Caractérisation des endomorphismes trigonalisables

La caractérisation des endomorphismes trigonalisables est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.5. *Un endomorphisme f de E est* ***trigonalisable*** *si et seulement si son polynôme caractéristique P_f est* ***scindé*** *sur $\mathbb{K}$.*

La version matricielle de ce théorème est la suivante :

> Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** si et seulement si son polynôme caractéristique P_A est **scindé** sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. On travaille sous la version matricielle.
• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que A est trigonalisable et montrons que son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Comme A est supposée trigonalisable, elle est semblable à une certaine matrice triangulaire supérieure T ; soit :

$$A \sim T = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{0}) & & t_{nn} \end{pmatrix}$$

(avec $t_{ij} \in \mathbb{K}$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$). D'où :

$$P_A(\lambda) = P_T(\lambda) = (t_{11}-\lambda)(t_{22}-\lambda)\cdots(t_{nn}-\lambda) = (-1)^n(\lambda-t_{11})(\lambda-t_{22})\cdots(\lambda-t_{nn}).$$

Le polynôme P_A est bien scindé sur $\mathbb{K}$ puisqu'il s'écrit comme produit de polynômes de premier degrés en λ.

• Inversement, montrons la propriété suivante :

($\mathscr{P}$) : « Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ est trigonalisable ».

Pour ce faire, on procède par récurrence sur n ($n \geq 2$).

<u>Pour $n = 2$:</u>

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ tel que P_A soit scindé sur $\mathbb{K}$; autrement dit, A possède 2 valeurs propres sur $\mathbb{K}$ (comptées avec leurs ordres de multiplicité). Notons par f l'endomorphisme associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soient λ_1 une valeur propre fixée de A et V_1 un vecteur propre associé à λ_1. On complète V_1 par un vecteur W_2 (de notre choix) de $\mathbb{K}^2$ pour avoir une base de $\mathbb{K}^2$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f(V_1) & = & \lambda_1 V_1 \ = \ \lambda_1 V_1 + 0 W_2 \\ f(W_2) & = & a V_1 + b W_2 \qquad \text{(pour certains } a, b \in \mathbb{K}). \end{array}$$

La matrice associée à f relativement à la nouvelle base (V_1, W_2) est donc :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

qui est bien triangulaire supérieure. D'où l'on déduit que f est trigonalisable et puis que A est trigonalisable.

<u>Soit $n \geq 3$:</u> Supposons que la propriété ($\mathscr{P}$) est vrai pour $(n-1)$ et montrons qu'elle reste vraie pour n. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que P_A soit scindé sur $\mathbb{K}$; autrement dit, A possède n valeurs propres sur $\mathbb{K}$ (comptées avec leurs ordres de multiplicité). On doit montrer que A est trigonalisable. Soit λ_1 une de ces valeurs propres et V_1 un vecteur propre associé à λ_1. On complète V_1 par $(n-1)$ vecteurs (de notre choix) de $\mathbb{K}^n$ pour avoir une base de $\mathbb{K}^n$. Notons par $(W_2, \dots, W_n)$ cette complétion. Notons aussi par f l'endomorphisme associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Dans la nouvelle base $(V_1, W_2, \dots, W_n)$ de $\mathbb{K}^n$, l'endomorphisme f est représenté par une matrice du type :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ (\mathbf{0}) & M \end{pmatrix},$$

où b_{ij} ($1 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq n$) désignent des éléments de $\mathbb{K}$, L désigne une matrice de $\mathcal{M}_{1\times(n-1)}$ (qui est une matrice ligne) et M désigne une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ (qui est une matrice carrée).
Comme les deux matrices A et B sont semblables (car elles représentent le même endomorphisme f), on a :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= P_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathrm{I}_n) \\ &= \det\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & L \\ (\mathbf{0}) & M - \lambda \mathrm{I}_{n-1} \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)\det(M - \lambda \mathrm{I}_{n-1}) = (\lambda_1 - \lambda) P_M(\lambda). \end{aligned}$$

Ceci montre que P_M divise P_A. Mais puisque P_A est scindé sur $\mathbb{K}$ (par hypothèse), on en déduit que P_M est lui aussi scindé [5] sur $\mathbb{K}$. Mais puisque M est une matrice carrée d'ordre $(n-1)$, il s'ensuit (d'après notre hypothèse de récurrence) que M est trigonalisable (sur $\mathbb{K}$). Il existe donc une matrice $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ tel que la matrice $Q^{-1}MQ$ soit triangulaire supérieure. Posons par suite :

$$P := \begin{pmatrix} 1 & (\mathbf{0}) \\ (\mathbf{0}) & Q \end{pmatrix}.$$

Il est claire que $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (\mathbf{0}) \\ (\mathbf{0}) & Q^{-1} \end{pmatrix}.$$

De plus, on a :

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & (\mathbf{0}) \\ (\mathbf{0}) & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ (\mathbf{0}) & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (\mathbf{0}) \\ (\mathbf{0}) & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & LQ \\ (\mathbf{0}) & Q^{-1}MQ \end{pmatrix},$$

qui est bien triangulaire supérieure (puisque $Q^{-1}MQ$ est triangulaire supérieure). On a finalement $A \sim B$ et $B \sim P^{-1}BP$, d'où $A \sim P^{-1}BP$. Ainsi A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, ce qui montre que A est trigonalisable. Ce qui achève cette récurrence et cette démonstration. ■

3.3 Application de la trigonalisation au calcul des puissances d'un certain type de matrices

Lorsqu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable et possède **une unique valeur propre**, il est possible d'expri-

(5). Il est facile de voir qu'un polynôme qui divise un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ est lui aussi scindé sur $\mathbb{K}$.

mer A^k ($k \in \mathbb{N}$) en fonction de k par le procédé de trigonalisation. La méthode utilisée se sert (en plus de la trigonalisation) de la formule du binôme sous sa forme matricielle, où l'une des deux matrices du binôme en question est *nilpotente* (voir ci-dessous).

3.3.1 Endomorphismes nilpotents et matrices nilpotentes

Définition 3.6. *Un endomorphisme f de E est dit **nilpotent** s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = \mathbf{0}$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel k vérifiant cette propriété s'appelle **l'indice de nilpotence** de f.*

La version matricielle de cette définition est la suivante :

Définition 3.7. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **nilpotente** s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = (\mathbf{0})$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel k vérifiant cette propriété s'appelle **l'indice de nilpotence** de A.*

Exemple : La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice 2. On a en effet $A^2 = (\mathbf{0})$ et $A^1 = A \neq (\mathbf{0})$.

Remarques :

1. Dans l'espace vectoriel E de dimension n, on peut montrer que tout endomorphisme nilpotent est d'indice $\leq n$. De même, toute matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est d'indice $\leq n$ (voir l'exercice 4.11).
2. On peut montrer que toute matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les éléments diagonaux sont tous nuls est nilpotente (cette propriété est une conséquence immédiate du théorème de Cayley-Hamilton qu'on étudiera au prochain chapitre).

3.3.2 Formule du binôme matricielle

Nous rappelons d'abord la formule du binôme d'al-Karaji :

Formule du binôme d'al-Karaji[(6)] **:** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$(x+y)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell},$$

(6). Abu Bakr al-Karaji (أبو بكر بن محمّد بن الحسين الكرجي) : Mathématicien arabe, né en 953 et mort vers 1029. Il fut un algébriste-arithméticien de premier ordre de son époque ; on lui doit en particulier l'invention de la démonstration par récurrence.

où $\binom{k}{\ell} = \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} = \frac{k(k-1)\cdots(k-\ell+1)}{\ell!}$ pour tout $\ell \in \{0, \dots, k\}$.

Lorsque k n'est pas assez grand (disons $k \leq 10$), il est plus commode de tirer ces coefficients binomiaux $\binom{k}{\ell}$ directement du triangle arithmétique d'al-Karaji. Dans ce triangle, ces coefficients sont calculés de pas à pas en se servant de la relation de récurrence :

$$\binom{k}{\ell} = \binom{k-1}{\ell} + \binom{k-1}{\ell-1} \qquad (\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \ell \in \mathbb{N}^* \text{ avec } \ell \leq k-1).$$

Le début du triangle d'al-Karaji est le suivant :

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Dans ce triangle, chaque ligne d'ordre k (en commençant par $k = 0$) donne les coefficients binomiaux $\binom{k}{\ell}$ $(0 \leq \ell \leq k)$. Par exemple, en utilisant le triangle d'al-Karaji, on tire immédiatement que $\binom{4}{2} = 6$.

Nous souhaitons maintenant voir s'il est possible d'appliquer la formule du binôme pour des matrices ; c'est-à-dire qu'au lieu de prendre deux nombres réels x et y, on prend deux matrices carrées de même ordre A et B. Il est facile de voir que dans le cas général (A, B quelconques), la formule du binôme n'est pas valable. En effet, on a par exemple :

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Pour avoir $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (qui est la formule du binôme correspondante à $k = 2$), il faudrait que l'on ait $AB = BA$, ce qui n'est pas toujours vrai (puisque le produit matriciel n'est pas commutatif). La formule du binôme matricielle dépend donc de la commutation des deux matrices A et B que l'on considère et on montre assez facilement que lorsque A et B commutent (c'est-à-dire $AB = BA$), le développement de $(A+B)^k$ $(k \in \mathbb{N})$ aboutit à la formule du binôme. On a plus précisément la :

Formule du binôme matricielle :
Soient A et B deux matrices carrées de même ordre qui **commutent** (c'est-à-dire qui vérifient $AB = BA$) et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, on a :

$$(A+B)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} A^{\ell} B^{k-\ell}.$$

3.3.3 Méthode de calcul de A^k ($k \in \mathbb{N}$) lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable et possède une unique valeur propre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de polynôme caractéristique P_A que l'on suppose scindé sur $\mathbb{K}$ et possède une unique racine λ de multiplicité n (autrement dit, A possède une unique valeur propre λ de multiplicité algébrique n). Il est alors possible d'exprimer A^k ($k \in \mathbb{N}$) en fonction de k en procédant de la façon suivante :

1. **Trigonalisation de A :**
   On trigonalise A (la matrice A est, en effet, trigonalisable puisque P_A est supposé scindé sur $\mathbb{K}$). Ceci équivaut à exprimer A sous la forme :
   $$A \ = \ PTP^{-1},$$
   avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure. Une simple récurrence montre que l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:
   $$A^k \ = \ PT^kP^{-1} \tag{$\star$}$$
2. **Calcul de T^k :**
   Comme $T \sim A$ alors T (tout comme A) possède une unique valeur propre λ, qui est de multiplicité algébrique n. Et puisque T est triangulaire supérieure, alors T s'écrit sous la forme :
   $$T \ = \ \begin{pmatrix} \lambda & t_{12} & \dots & \dots & t_{1n} \\ & \ddots & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & (\mathbf{0}) & & \ddots & t_{(n-1),n} \\ & & & & \lambda \end{pmatrix},$$
   avec $t_{ij} \in \mathbb{K}$ (pour tous $1 \leq i \leq n-1$, $i < j \leq n$).
   Par suite, on décompose T comme suit :
   $$T \ = \ \lambda \mathrm{I}_n + N, \quad \text{avec} \quad N \ := \ \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & \dots & \dots & t_{1n} \\ & \ddots & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & (\mathbf{0}) & & \ddots & t_{(n-1),n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

D'une part, on peut montrer que $N^n = (\mathbf{0})$ (voir les remarques faites au §3.3.1). Ceci montre que la matrice N est nilpotente d'indice $\leq n$. Notons par e l'indice de nilpotence de N (c'est-à-dire le plus petit entier positif vérifiant $N^e = (\mathbf{0})$).
D'autre part, les deux matrices $\lambda \mathrm{I}_n$ et N commutent puisqu'on a $(\lambda \mathrm{I}_n)N = N(\lambda \mathrm{I}_n) = \lambda N$. Ce fait nous autorise à utiliser la formule du binôme matricielle pour développer $(\lambda \mathrm{I}_n + N)^k$ ($k \in \mathbb{N}$). On obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$T^k = (\lambda \mathrm{I}_n + N)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (\lambda \mathrm{I}_n)^{k-\ell} N^\ell = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \lambda^{k-\ell} N^\ell.$$

Mais comme $N^\ell = (\mathbf{0})$ dès que $\ell \geq e$, on a simplement :

$$T^k = \sum_{\ell=0}^{e-1} \binom{k}{\ell} \lambda^{k-\ell} N^\ell \qquad (\star\star)$$

(noter que $\binom{k}{\ell} = 0$ pour tout $\ell > k$).
La formule $(\star\star)$ donne l'expression de T^k ($k \in \mathbb{N}$) en fonction de k.

3. **Calcul de A^k :**
Il ne reste qu'à substituer $(\star\star)$ dans $(\star)$ pour aboutir au final à l'expression recherchée de A^k ($k \in \mathbb{N}$) en fonction de k.

Remarque : Lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable mais possède plus d'une valeur propre, la méthode décrite ci-dessus, *telle quelle*, ne fonctionne plus car l'application de la formule du binôme matricielle est injustifiée dans ce cas. En effet, l'application de la formule du binôme matricielle exige une commutation de deux matrices, ce qui n'est pas vérifié en général.
Il est à noter que même dans le cas général, la formule du binôme matricielle peut servir pour calculer A^k ; cependant la décomposition qu'on utilise pour T (ou A) n'est plus triviale comme $T = \lambda \mathrm{I}_n + N$ mais elle relève de tout une stratégie. On montre plus précisément que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$, il existent deux matrices D et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec D diagonalisable, N nilpotente et D et N commutent, telles que $A = D + N$. Une telle décomposition est, de plus, unique et est connue sous le nom de **la décomposition de Dunford**(7) de A (voir l'exercice 5.4).

☞ Pour des applications numériques (trigonalisation et calcul des puissances d'une matrice), faire les exercices 3.1, 3.2 et 3.3.

(7). Nelson Dunford (1906-1986) : Mathématicien américain.

Exercices

Exercice 3.1.

1) Trigonaliser sur $\mathbb{R}$ chacune des deux matrices suivantes :

a) $A := \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

2) Exprimer A^n $(n \in \mathbb{N})$ en fonction de n.

Exercice 3.2. Trigonaliser sur $\mathbb{R}$ chacune des matrices suivantes :

i) $A := \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

ii) $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

iii) $C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.3 (**Rattrapage de l'année 2012-2013**).

Soit A la matrice carrée d'ordre 3, à coefficients réels, donnée par :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

— En utilisant la méthode de votre choix, exprimer A^n en fonction de n (où n est un entier naturel).

Exercice 3.4 (**Interrogation de l'année 2013-2014**).
Pour tout ce qui suit, k désigne un paramètre réel. On travaille sur le corps commutatif $\mathbb{R}$ et on considère A_k la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$A_k := \begin{pmatrix} 0 & k & -k \\ -1 & k+1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A_k et en déduire le spectre de A_k.

2) Montrer, sans calcul d'espace propre, que la matrice A_1 n'est pas diagonalisable.

3) En distinguant les valeurs de k, déterminer les espaces propres de A_k tout en précisant la dimension de chacun d'entre eux.

4) En déduire que A_k est diagonalisable pour tout $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

5) Trigonaliser A_1 puis exprimer A_1^n en fonction de n (où n est un entier naturel).

*
* *

Chapitre 4

Polynôme annulateur, polynôme minimal et théorème de Cayley-Hamilton

Pour tout ce qui suit, on fixe $\mathbb{K}$ un corps commutatif (on pense toujours à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

4.1 Application d'un polynôme à un endomorphisme ou à une matrice

Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, f un endomorphisme de E et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ecrivons

$$P(X) \;=\; a_0X^k + a_1X^{k-1} + \cdots + a_k,$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$.

Définition 4.1.
• *L'application du polynôme P à l'endomorphisme f est l'endomorphisme de E, noté $P(f)$ et défini par :*

$$P(f) \;:=\; a_0f^k + a_1f^{k-1} + \cdots + a_{k-1}f + a_k\mathrm{Id}_E,$$

avec

$$f^i \;:=\; \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{i\ fois} \qquad (\forall i \in \mathbb{N}^*).$$

• *De même, l'application du polynôme P à la matrice A est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $P(A)$ et définie par :*

$$P(A) \;:=\; a_0 A^k + a_1 A^{k-1} + \cdots + a_{k-1} A + a_k \mathrm{I}_n.$$

Quelques propriétés importantes

Une commutativité particulière

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, f un endomorphisme de E et A une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$. Il est facile de voir que l'on a [(8)] :

$$\begin{aligned} P(f) \circ Q(f) &= (P \cdot Q)(f) \\ P(A) \cdot Q(A) &= (P \cdot Q)(A). \end{aligned}$$

Puisque la multiplication de deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est commutative, on en déduit que l'on a :

$$\begin{aligned} P(f) \circ Q(f) &= Q(f) \circ P(f) \\ P(A) \cdot Q(A) &= Q(A) \cdot P(A). \end{aligned}$$

Autrement dit, les deux endomorphismes $P(f)$ et $Q(f)$ commutent ainsi que les deux matrices $P(A)$ et $Q(A)$. Ce qui est à saisir est donc :

> « Deux endomorphismes de E ne commutent pas en général mais ils commutent dans le cas particulier où ils sont obtenus comme application de polynômes à un même endomorphisme de E. »

De même :

> « Deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ ne commutent pas en général mais elles commutent dans le cas particulier où elles sont obtenues comme application de polynômes à une même matrice de $\mathcal{M}_n(K)$. »

Application d'un polynôme à une matrice diagonale

Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et

$$D \;=\; \begin{pmatrix} d_1 & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & d_n \end{pmatrix}$$

(8). Ceci provient essentiellement du fait que la composition des endomorphismes est distributive par rapport à leur addition ; de même, la multiplication des matrices est distributive par rapport à leur addition.

une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(K)$. Puisqu'on a trivialement pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$D^i = \begin{pmatrix} d_1^i & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & d_n^i \end{pmatrix}$$

(avec la convention $D^0 = I_n$), alors en écrivant

$$P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$$

(avec $k \in \mathbb{N}$ et $a_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i = 0, \dots, k$), on obtient :

$$P(D) = \sum_{i=0}^{k} a_i D^i = \sum_{i=0}^{k} a_i \begin{pmatrix} d_1^i & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & d_n^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{k} a_i d_1^i & & (\mathbf{0}) \\ & \vdots & \\ (\mathbf{0}) & & \sum_{i=0}^{k} a_i d_n^i \end{pmatrix};$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{P(D) = \begin{pmatrix} P(d_1) & & (\mathbf{0}) \\ & \vdots & \\ (\mathbf{0}) & & P(d_n) \end{pmatrix}} \tag{4.1}$$

La formule (4.1) est remarquable. Elle nous apprend simplement que l'application d'un polynôme P (de $\mathbb{K}[X]$) à une matrice diagonale D (de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) donne une matrice diagonale qu'on obtient en appliquant P à chacun des éléments diagonaux de D.

Application d'un polynôme à deux matrices semblables

Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe donc $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = M^{-1}AM$. Une simple récurrence [9] montre que l'on a pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$B^i = M^{-1}A^iM.$$

En écrivons alors

$$P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$$

(9). Déjà vue au chapitre 2 (cf. page 22).

(avec $k \in \mathbb{N}$ et $a_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i = 0, \dots, k$), on obtient :

$$P(B) = \sum_{i=0}^{k} a_i B^i = \sum_{i=0}^{k} a_i \left(M^{-1} A^i M\right) = M^{-1} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i A^i\right) M;$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{P(B) = M^{-1} P(A) M} \tag{4.2}$$

De cette importante relation (4.2), on tire la conséquence immédiate suivante :

Conséquence. *Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$. Alors, on a :*

$$A \sim B \Longrightarrow P(A) \sim P(B).$$ ■

Notons enfin que les deux formules (4.1) et (4.2) permettent de démontrer très facilement le théorème de Cayley-Hamilton (cf. le théorème 4.5) dans le cas particulier d'une matrice **diagonalisable**. Nous avons choisi de laisser cette application très importante à titre d'exercice :

> **Exercice :** Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'on a :
> $$P_A(A) = (\mathbf{0}).$$

4.2 Polynômes annulateurs

4.2.1 Définition et exemples

Définition 4.2. *Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, f un endomorphisme de E et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
• *On dit que P est un polynôme **annulateur** de f si $P(f) = \mathbf{0}$ (où $\mathbf{0}$ désigne l'endomorphisme identiquement nul de E).*
• *De même, on dit que P est un polynôme **annulateur** de A si $P(A) = (\mathbf{0})$.*

Deux exemples importants :

1. **Les projecteurs :**
   Un projecteur de E est un endomorphisme π de E, vérifiant $\pi^2 = \pi$.
   Il est immédiat que le polynôme $P(X) = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de tout projecteur de E.
   ☞ Sur les projecteurs, on a proposé dans ce polycopié l'exercice 2.6.

2. **Les involutions :**
   Une involution de E est un endomorphisme u de E, vérifiant $u^2 = \mathrm{Id}_E$.
   Le polynôme $Q(X) = X^2 - 1$ est clairement un polynôme annulateur de toute involution de E.
   ☞ Sur les involutions, on a proposé dans ce polycopié l'exercice 1.5.

4.2.2 Existence de polynômes annulateurs

Le polynôme identiquement nul de $\mathbb{K}[X]$ est trivialement un polynôme annulateur de tout endomorphisme de E (resp. de toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Ce qui est moins évident à montrer est l'existence d'un polynôme annulateur **non identiquement nul** de $\mathbb{K}[X]$ d'un endomorphisme donné de E (resp. d'une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). On a la

Proposition 4.3. *Soit f un endomorphisme de E (resp. A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Alors, il existe dans $\mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur P de f (resp. de A) qui soit non identiquement nul.*

Démonstration. On se propose de démontrer la version matricielle de la proposition. Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est clairement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension [(10)] n^2. La famille des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{I}_n \ , \ A \ , \ A^2 \ , \ \dots \ , \ A^{n^2}$$

a pour cardinal (n^2+1) qui dépasse strictement la dimension de $\mathcal{M}_n(K)$. Cette famille est donc forcément liée. Autrement dit, il existe $a_0, a_1, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K}$, non tous nuls, tel que l'on ait :

$$a_0 \mathrm{I}_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_{n^2} A^{n^2} \ = \ (\mathbf{0}).$$

Mais ceci équivaut à dire que le polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, défini par :

$$P(X) \ := \ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n^2} X^{n^2}$$

(qui est non identiquement nul puisque les a_i $(0 \leq i \leq n^2)$ ne sont pas tous nuls) est un polynôme annulateur de A. Ce qui confirme le résultat de la proposition et achève cette démonstration. ■

Remarque : Soit f un endomorphisme de E.
La démonstration précédente de la proposition 4.3 montre plus précisément l'existence dans $\mathbb{K}[X]$ d'un polynôme annulateur de f qui soit non identiquement nul et de degré $\leq \boldsymbol{n^2}$. Le théorème de Cayley-Hamilton (voir le

(10). En effet, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède exactement n^2 coefficients.

théorème 4.5) améliore ce résultat en montrant l'existence dans $\mathbb{K}[X]$ d'un polynôme annulateur de f qui soit non identiquement nul et de degré $\leq \boldsymbol{n}$. Noter aussi que lorsque f est arbitraire, cette amélioration est optimale.

4.2.3 Lien entre les polynômes annulateurs et le spectre d'un endomorphisme

Pour ce qui suit, étant donné $P \in \mathbb{K}[X]$, on note par $\mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(P)$ (où simplement par $\mathrm{Z}(P)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps commutatif $\mathbb{K}$) l'ensemble des **racines** de P dans $\mathbb{K}$, qu'on appellent aussi « les **zéros** de P ». On a le

Théorème 4.4. *Soient f un endomorphisme de E et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur non identiquement nul de f. Alors, les valeurs propres de f se trouvent parmi les zéros de P. Autrement dit, on a :*

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f) \ \subset \ \mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(P).$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f et montrons que λ est un zéro de P, c'est-à-dire que $P(\lambda) = 0$. Par définition même de λ, il existe $V \in E$, $V \neq \mathbf{0}_E$, tel que $f(V) = \lambda V$. Par suite, une simple récurrence montre que l'on a pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$f^i(V) \ = \ \lambda^i V.$$

En écrivant

$$P(X) \ = \ a_0 + a_1 X + \cdots + a_k X^k$$

(avec $k \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$), il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} P(f)(V) &= \left(a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_k f^k\right)(V) \\ &= a_0 \mathrm{Id}_E(V) + a_1 f(V) + a_2 f^2(V) + \cdots + a_k f^k(V) \\ &= a_0 V + a_1(\lambda V) + a_2(\lambda^2 V) + \cdots + a_k(\lambda^k V) \\ &= \left(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_k\lambda^k\right) V \\ &= P(\lambda) V. \end{aligned}$$

Mais puisque $P(f) = \mathbf{0}$ (car P est un polynôme annulateur de f), il en résulte que :

$$P(\lambda)V = \mathbf{0}_E.$$

Mais comme $V \neq \mathbf{0}_E$, on en conclut que

$$P(\lambda) \ = \ 0,$$

ce qui montre que λ est effectivement un zéro de P, comme il fallait le prouver. Le théorème est démontré. $\blacksquare$

Deux exemples importants :

1. **Les projecteurs (cf. page 39) :**
Etant donné un projecteur π de E (c'est-à-dire un endomorphisme π de E vérifiant $\pi^2 = \pi$), le polynôme $P(X) = X^2 - X$ est bien un polynôme annulateur de π. Il en résulte donc (en vertu du théorème 4.4) que $\mathrm{Sp}(\pi) \subset \mathrm{Z}(P) = \{0, 1\}$. Ainsi, π ne peut avoir comme valeurs propres que les nombres 0 et 1. On peut montrer plus précisément (voir l'exercice 2.6) que si $\pi \neq \mathbf{0}$ et $\pi \neq \mathrm{Id}_E$, alors ces nombres 0 et 1 sont tous les deux des valeurs propres de π.
2. **Les involutions (cf. page 40) :**
Etant donnée une involution u de E (c'est-à-dire un endomorphisme u de E vérifiant $u^2 = \mathrm{Id}_E$), le polynôme $Q(X) = X^2 - 1$ est bien un polynôme annulateur de u. Il en résulte donc (en vertu du théorème 4.4) que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathrm{Z}(Q) = \{-1, 1\}$. Ainsi, u ne peut avoir comme valeurs propres que les nombres -1 et 1. On peut montrer plus précisément (voir l'exercice 1.5) que si $u \neq \pm\mathrm{Id}_E$, alors ces nombres -1 et 1 sont tous les deux des valeurs propres de u.

4.3 Le théorème de Cayley-Hamilton

Le théorème qui va suivre est fondamental. Il fut obtenu d'abord par Hamilton (11) dans le cas particulier d'un espace vectoriel E de dimension 4 (plus précisément pour $E = \mathscr{H}$, où $\mathscr{H}$ est l'espace des quaternions), puis il a été généralisé par Cayley (12) au cas de tout espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 4.5 (Cayley-Hamilton)**.** *Soit f un endomorphisme de E. Alors le polynôme caractéristique de f est un polynôme annulateur de f. Autrement dit, on a :*

$$P_f(f) = \mathbf{0}.$$

La version matricielle du théorème de Cayley-Hamilton est évidemment la suivante :

(11). William Rowan Hamilton (1805-1865) : Mathématicien, physicien et astronome irlandais. On lui doit la découverte du corps des quaternions (qui est un corps non commutatif strictement plus grand que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes).
(12). Arthur Cayley (1821-1895) : Mathématicien britannique. Il est le fondateur du calcul matriciel.

Théorème de Cayley-Hamilton (version matricielle).
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A. Autrement dit, on a :

$$P_A(A) \;=\; (\mathbf{0}).$$

Démonstration. Dans ce qui va suivre, on démontre le théorème de Cayley-Hamilton dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, puis nous le déduisons dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ à partir du théorème fondamental de l'algèbre et enfin nous dirons comment l'obtenir dans son cas général d'un corps commutatif quelconque.
•1^er cas ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) :
D'après le théorème fondamental de l'algèbre (cf. page 17), tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$; en particulier, P_f est scindé sur $\mathbb{C}$. Il s'ensuit (d'après le théorème 3.5) que f est trigonalisable. Ce qui signifie qu'il existe une base $(V_1, \dots, V_n)$ de E, suivant laquelle f est représenté par une matrice triangulaire supérieure

$$T \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{0}) & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$). On a donc :

$$P_f(\lambda) \;=\; P_T(\lambda) \;=\; (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda).$$

D'où :

$$P_f(f) \;=\; (\lambda_1 \mathrm{Id}_E - f) \circ (\lambda_2 \mathrm{Id}_E - f) \circ \dots \circ (\lambda_n \mathrm{Id}_E - f)\,.$$

Nous introduisons maintenant $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ la suite finie d'endomorphismes de E, définie par :

$$g_i \;:=\; (\lambda_1 \mathrm{Id}_E - f) \circ (\lambda_2 \mathrm{Id}_E - f) \cdots \circ (\lambda_i \mathrm{Id}_E - f)$$

(pour tout $i = 1, 2, \dots, n$). On a en particulier $g_n = P_f(f)$. Il s'agit donc de montrer que $g_n = \mathbf{0}$. Pour ce faire, nous allons montrer par récurrence sur i la propriété :

$(\mathscr{P})$: $\quad g_i(V_1) = g_i(V_2) = \dots = g_i(V_i) = \mathbf{0}_E \quad$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Pour $i = 1$: On a :

$$g_1(V_1) = (\lambda_1 \mathrm{Id}_E - f)(V_1) = \lambda_1 V_1 - f(V_1) \;=\; \mathbf{0}_E$$

(car $f(V_1) = \lambda_1 V_1$, en vertu de la représentation matricielle de f). La propriété $(\mathscr{P})$ est donc vraie pour $i = 1$.
Soit $i \in \{1, \dots, n-1\}$: Supposons que la propriété $(\mathscr{P})$ est vraie pour l'entier i, c'est-à-dire que l'on a :

$$g_i(V_1) = g_i(V_2) = \cdots = g_i(V_i) = \mathbf{0}_E$$

et montrons qu'elle reste vraie pour l'entier $(i+1)$, c'est-à-dire que l'on a aussi :

$$g_{i+1}(V_1) = g_{i+1}(V_2) = \cdots = g_{i+1}(V_i) = g_{i+1}(V_{i+1}) = \mathbf{0}_E.$$

On a par définition même :

$$g_{i+1} \;=\; g_i \circ (\lambda_{i+1}\mathrm{Id}_E - f) \tag{4.3}$$

Mais on constate que les deux endomorphismes g_i et $(\lambda_{i+1}\mathrm{Id}_E - f)$ sont obtenus comme application de deux polynômes au même endomorphisme f. Il en découle donc (d'après les propriétés vues à la section 4.1) que ces deux endomorphismes g_i et $(\lambda_{i+1}\mathrm{Id}_E - f)$ commutent. On a donc également :

$$g_{i+1} = (\lambda_{i+1}\mathrm{Id}_E - f) \circ g_i \tag{4.4}$$

En utilisant (4.4), il découle immédiatement de notre hypothèse de récurrence que l'on a :

$$g_{i+1}(V_1) = g_{i+1}(V_2) = \cdots = g_{i+1}(V_i) = \mathbf{0}_E.$$

Par ailleurs, en utilisant (4.3), on a :

$$g_{i+1}(V_{i+1}) = \left(g_i \circ (\lambda_{i+1}\mathrm{Id}_E - f)\right)(V_{i+1}) = g_i\left(\lambda_{i+1}V_{i+1} - f(V_{i+1})\right).$$

Mais, en se servant de la représentation matricielle de f, on voit que le vecteur $\lambda_{i+1}V_{i+1} - f(V_{i+1})$ est une combinaison linéaire des vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_i$. On a donc (en vertu de notre hypothèse de récurrence) : $g_i(\lambda_{i+1}V_{i+1} - f(V_{i+1})) = \mathbf{0}_E$; d'où

$$g_{i+1}(V_{i+1}) = \mathbf{0}_E.$$

En récapitulant, on a :

$$g_{i+1}(V_1) = g_{i+1}(V_2) = \cdots = g_{i+1}(V_i) = g_{i+1}(V_{i+1}) = \mathbf{0}_E.$$

Ce qui montre que la propriété $(\mathscr{P})$ est vraie aussi pour l'entier $(i+1)$, comme il fallait le prouver. Ceci achève notre preuve de récurrence et montre

que la propriété $(\mathscr{P})$ est effectivement vraie pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
L'utilisation de la propriété $(\mathscr{P})$ pour $i = n$ donne :

$$g_n(V_1) = g_n(V_2) = \cdots = g_n(V_n) = \mathbf{0}_E.$$

Mais puisque $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ constitue une base de E, on en conclut que g_n est l'endomorphisme nul de E ; soit $g_n = \mathbf{0}$, c'est-à-dire $P_f(f) = \mathbf{0}$. Ceci achève la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton dans ce premier cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

• **2ème cas ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) :**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice représentant f relativement à une certaine base de E. En considérant A comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a d'après le 1er cas (déjà démontré) du théorème de Cayley-Hamilton : $P_A(A) = (\mathbf{0})$. Ce qui équivaut à $P_f(f) = \mathbf{0}$, comme il fallait le prouver.

• **3ème cas (cas général : $\mathbb{K}$ quelconque) :**
On utilise le théorème de Steinitz (cf. page 18) selon lequel « tout corps commutatif peut être plongé dans un corps commutatif plus grand qui soit algébriquement clos ». On plonge alors $\mathbb{K}$ dans un autre corps commutatif $\mathbb{K}'$ qui soit algébriquement clos. On montre exactement de la même façon que le 1er cas que le théorème de Cayley-Hamilton est vrai sur $\mathbb{K}'$. Par suite, en représentant f par une certaine matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a bien $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$. Il s'ensuit (d'après le théorème de Cayley-Hamilton sur $\mathbb{K}'$) que $P_A(A) = (\mathbf{0})$. Ce qui équivaut à $P_f(f) = \mathbf{0}$, comme il fallait le prouver.
La démonstration du théorème de Cayley-Hamilton est achevée. ■

4.4 Calcul de la puissance $k^{\text{ème}}$ d'une matrice en utilisant un polynôme annulateur

Pour fixer les idées, on prend dans cette section $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le cas général "$\mathbb{K}$ quelconque" se traitent de la même manière que celle utilisée dans la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton).
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme annulateur de A que l'on suppose non identiquement nul (on peut prendre par exemple $P = P_A$, en vertu du théorème de Cayley-Hamilton). On note par d le degré de P. Il est possible d'exprimer A^k ($k \in \mathbb{N}$) en fonction de k sans effectuer aucune réduction de la matrice A et ceci en se servant seulement du polynôme P. La méthode que l'on utilise pour cet objectif est décrite dans ce qui suit :

• On considère la division euclidienne de X^k ($k \in \mathbb{N}$) sur $P(X)$; soit

$$X^k = Q_k(X)P(X) + R_k(X) \qquad (\star)$$

avec Q_k et R_k des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui dépendent à priori de k et $\deg R_k < \deg P = d$. Le polynôme R_k est donc de degré $\leq d-1$ et on peut l'exprimer, par conséquent, sous la forme :

$$R_k(X) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)} X + a_2^{(k)} X^2 + \cdots + a_{d-1}^{(k)} X^{d-1},$$

avec $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \dots, a_{d-1}^{(k)}$ des nombres complexes (dépendant à priori de k) que l'on déterminera par le procédé qui va suivre.
D'après le théorème fondamental de l'algèbre (cf. page 17), le polynôme P possède exactement d racines complexes, lesquelles sont comptées avec leurs ordres de multiplicité. Notons par $x_1, x_2, \dots, x_h$ les racines complexes, deux à deux distinctes, de P et par $m_1, m_2, \dots, m_h$ leurs multiplicités respectives. On a donc $m_1 + m_2 + \cdots + m_h = d$.
Pour chaque racine complexe x_i $(1 \leq i \leq h)$ de P, on considère le système d'identités constitué de $(\star)$ et de ses dérivées d'ordres $1, 2, \dots, m_i - 1$ et on substitue dans chacune de ces identités l'indéterminée X par x_i. Comme x_i $(1 \leq i \leq h)$ est une racine de P de multiplicité m_i alors x_i est -à fortiori- une racine du polynôme $Q_k(X)P(X)$, de multiplicité au moins m_i. Ceci entraîne que pour tout $\alpha \in \{0, 1, \dots, m_i - 1\}$, le polynôme $\left(\frac{d}{dX}\right)^\alpha (Q_k(X)P(X))$ s'annule en x_i. On obtient donc (par la substitution suscitée) le système d'équations :

$$\left(\frac{d}{dX}\right)^\alpha (X^k)\Big|_{X=x_i} = \left(\frac{d}{dX}\right)^\alpha (R_k(X))\Big|_{X=x_i} \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, m_i - 1).$$

Il s'agit d'un système de m_i équations aux d inconnus $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \dots, a_{d-1}^{(k)}$.
Au final, l'adjonction de tous ces systèmes d'équations (correspondants à $i = 1, 2, \dots, h$) donne un système de $m_1 + m_2 + \cdots + m_h = d$ équations aux d inconnus $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \dots, a_{d-1}^{(k)}$ dont la résolution (13) donne les expressions de $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \dots, a_{d-1}^{(k)}$ en fonction de k ; c'est-à-dire l'expression explicite du polynôme $R_k(X)$ en fonction de k.
• Une fois que le polynôme $R_k(X)$ $(k \in \mathbb{N})$ est exprimé explicitement en fonction de k, on applique les deux polynômes de l'identité $(\star)$ à la matrice A. Ce qui donne :

$$A^k = Q_k(A)P(A) + R_k(A).$$

Mais puisque $P(A) = (\mathbf{0})$ (car P est un polynôme annulateur de A), il en résulte que :

$$A^k = R_k(A)$$

(13). On peut montrer que ce système est toujours un système de Cramer (c'est-à-dire de déterminant non nul).

et l'on obtient ainsi l'expression explicite de A^k ($k \in \mathbb{N}$) en fonction de k.

Pour que cette méthode soit bien saisie, nous allons en traiter un exemple concret.

Exemple : Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On se propose d'exprimer A^k ($k \in \mathbb{N}$) en fonction de k.
On prend comme polynôme annulateur de la matrice A son polynôme caractéristique P_A que l'on calcule immédiatement en constatant que A est triangulaire supérieure. On a :

$$P_A(X) = (1-X)(2-X)^3 = (X-1)(X-2)^3.$$

Les racines (complexes) de P_A sont visiblement $x_1 = 1$ (racine simple) et $x_2 = 2$ (racine triple).
Maintenant, étant donné $k \in \mathbb{N}$, considérons la division euclidienne de X^k sur $P_A(X)$, qui s'écrit :

$$X^k = Q_k(X)P_A(X) + R_k(X),$$

où Q_k et R_k sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ (qui dépendent à priori de k), avec $\deg R_k < \deg P_A = 4$. On a donc $\deg R_k \leq 3$, ce qui permet d'écrire $R_k(X)$ sous la forme :

$$R_k(X) = a_k X^3 + b_k X^2 + c_k X + d_k,$$

avec a_k, b_k, c_k et d_k des nombres réels (dépendants à priori de k) que l'on déterminera. On a par suite l'identité :

$$X^k = Q_k(X)P_A(X) + a_k X^3 + b_k X^2 + c_k X + d_k \tag{I}$$

Afin de déterminer les réels a_k, b_k, c_k et d_k (en fonction de k), nous allons substituer dans l'identité (I) ainsi que dans ses dérivées (à des ordres bien choisis), l'indéterminée X par chacune des racines de P, qui sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

<u>Pour la racine $x_1 = 1$:</u>
Comme cette racine est simple (i.e. de multiplicité 1), nous allons substituer X par $x_1 = 1$ uniquement dans l'identité (I). Cette substitution donne :

$$1 = a_k + b_k + c_k + d_k \tag{1}$$

(puisque $P_A(1) = 0$).
Pour la racine $x_2 = 2$:
Comme cette racine est triple (i.e. de multiplicité 3), nous devons substituer X par $x_2 = 2$ à la fois dans l'identité (I), dans sa dérivée première et dans sa dérivée seconde.
— En substituant X par $x_2 = 2$ dans (I), on obtient :

$$2^k = 8a_k + 4b_k + 2c_k + d_k \tag{2}$$

(puisque $P_A(2) = 0$).
— En dérivant l'identité (I) (membre à membre) puis en substituant dans l'identité obtenue X par $x_2 = 2$, on obtient :

$$k2^{k-1} = 12a_k + 4b_k + c_k \tag{3}$$

(puisque $P_A(2) = P'_A(2) = 0$).
— Enfin, en dérivant deux fois l'identité (I) (membre à membre) puis en substituant dans l'identité obtenue X par $x_2 = 2$, on obtient :

$$k(k-1)2^{k-2} = 12a_k + 2b_k \tag{4}$$

(puisque $P_A(2) = P'_A(2) = P''_A(2) = 0$).
En résolvant le système constitué des 4 équations (1), (2), (3) et (4), on obtient :

$$\begin{array}{rcl} a_k &=& (k^2 - 5k + 8)2^{k-3} - 1 \\ b_k &=& (-5k^2 + 29k - 48)2^{k-3} + 6 \\ c_k &=& (2k^2 - 13k + 24)2^{k-1} - 12 \\ d_k &=& (-k^2 + 7k - 14)2^{k-1} + 8 \end{array} \tag{II}$$

En appliquant par ailleurs les deux polynômes de l'identité (I) à la matrice A, on obtient :

$$A^k = Q_k(A)P_A(A) + a_kA^3 + b_kA^2 + c_kA + d_k\mathrm{I}_4.$$

Mais puisque $P_A(A) = (\mathbf{0})$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, il en résulte que :

$$A^k = a_kA^3 + b_kA^2 + c_kA + d_k\mathrm{I}_4.$$

En calculant A^2 puis A^3 et en les substituant (avec bien sûr les deux matrices A et I_4) dans le membre droit de cette dernière formule, on aboutit à :

$$A^k = \begin{pmatrix} a_k + b_k + c_k + d_k & -7a_k - 3b_k - c_k & 26a_k + 10b_k + 3c_k & 13a_k + 4b_k + c_k \\ 0 & 8a_k + 4b_k + 2c_k + d_k & -12a_k - 4b_k - c_k & 18a_k + 7b_k + 2c_k \\ 0 & 0 & 8a_k + 4b_k + 2c_k + d_k & 12a_k + 4b_k + c_k \\ 0 & 0 & 0 & 8a_k + 4b_k + 2c_k + d_k \end{pmatrix}.$$

Il ne reste qu'à remplacer a_k, b_k, c_k et d_k par leurs valeurs obtenues dans (II) pour arriver enfin à l'expression recherchée de A^k en fonction de k, à savoir :

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1-2^k & (k+4)2^{k-1}-2 & (k^2-k+8)2^{k-3}-1 \\ 0 & 2^k & -k2^{k-1} & (9k-k^2)2^{k-3} \\ 0 & 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \qquad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

Remarque : Ni la diagonalisation, ni la trigonalisation ne permettent d'avoir la formule précédente pour A^k $(k \in \mathbb{N})$ en fonction de k. En effet, on peut montrer que la matrice A précédente n'est pas diagonalisable et puis sa trigonalisation ne permet pas non plus d'en déduire sa puissance $k^{\text{ème}}$ puisqu'elle possède plus d'une valeur propre. La méthode présentée ci-dessus est donc primordiale pour certaines matrices.

4.5 Le polynôme minimal d'un endomorphisme

4.5.1 Définition, existence et unicité du polynôme minimal d'un endomorphisme

Etant donné f un endomorphisme de E, on a vu au §4.2.2, par un simple raisonnement, qu'il existe un polynôme annulateur (non identiquement nul) de f qui soit de degré $\leq n^2$. Ensuite, au §4.3, on a amélioré ce résultat par l'important théorème de Cayley-Hamilton qui montre que le polynôme caractéristique P_f de f (qui est de degré seulement n) annule f. Il est donc tout à fait naturel de se poser la question de savoir s'il n'existe pas un polynôme (non identiquement nul) de degré encore plus petit que n qui annule f. On peut montrer que dans le cas d'un endomorphisme *général* f de E, le nombre $n = \dim E$ est *le plus petit degré possible* pour un polynôme annulateur (non identiquement nul) de f (voir par exemple les matrices de Jordan au chapitre 6). Néanmoins, il se peut dans beaucoup de cas d'endomorphismes f de E, qu'un polynôme annulateur (non identiquement nul) de f, *de degré strictement plus petit que* n, existe. L'objectif de cette section est d'étudier les polynômes annulateurs d'un endomorphisme de E qui soient *de plus petit degré*. On a le :

Théorème-Définition 4.6. *Soit f un endomorphisme de E. Alors, parmi les polynômes annulateurs de f, il existe un et un seul qui soit de plus petit degré et unitaire*[(14)]*. Ce polynôme s'appelle* ***le polynôme minimal de*** f *et on le note* $\mathfrak{M}_f$.

Démonstration.
Existence du polynôme minimal de f :
On considère le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ suivant :

$$X := \big\{k \in \mathbb{N} : \text{ il existe un polynôme non identiquement nul } P \text{ de } \mathbb{K}[X], \text{ de degré } k, \text{ qui annule } f\big\}.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton montre que $n \in X$. Ainsi, X est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Il s'ensuit donc que X possède un plus petit élément. Notons par d le plus petit élément de X. Puisque $d \in X$, il existe un polynôme non identiquement nul P_1 de $\mathbb{K}[X]$, de degré d, tel que $P_1(f) = \mathbf{0}$. En notant par a le coefficient dominant de P_1 (c'est-à-dire le coefficient de X^d dans $P_1(X)$) et en posant :

$$P(X) := \frac{1}{a} P_1(X),$$

il est bien clair que P est un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$, que P annule f (car P_1 annule f) et que P est de degré d, c'est-à-dire de plus petit degré parmi les polynômes annulateurs de f. Ce polynôme P est donc un polynôme minimal de f.
Unicité du polynôme minimal de f :
On procède par l'absurde en supposant qu'il existe P et Q deux polynômes minimaux distincts de f. On s'intéresse au polynôme $R := P - Q$. Ce polynôme R est non identiquement nul (puisque $P \neq Q$) et annule f (puisque P et Q sont tous les deux des polynômes annulateurs de f). D'autre part, par définition même de P et Q, on ne peut avoir ni $\deg P < \deg Q$, ni $\deg Q < \deg P$; on a donc forcément $\deg P = \deg Q$. Ceci entraîne (puisque P et Q sont tous les deux unitaires) que le polynôme $(P - Q) = R$ est de degré strictement inférieur à $\deg P = \deg Q$. Ce qui est en contradiction apparente avec la minimalité des degrés de P et Q parmi l'ensemble des degrés des polynômes annulateurs de f. D'où l'unicité du polynôme minimal de f. Le théorème est démontré. ∎

(14). Un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ est un polynôme non identiquement nul et ayant pour coefficient dominant (i.e., pour coefficient du monôme du plus haut degré) 1.

4.5.2 Deux propriétés fondamentales du polynôme minimal d'un endomorphisme

Nous allons voir maintenant deux propriétés du polynôme minimal qui nous permettent de le déterminer concrètement pour un endomorphisme donné. On a la :

Proposition 4.7. *Soit f un endomorphisme de E. Le polynôme minimal $\mathfrak{M}_f$ de f possède les deux propriétés suivantes :*

i) *Toute valeur propre de f est une racine de $\mathfrak{M}_f$.*

ii) *Le polynôme $\mathfrak{M}_f$ divise tout polynôme annulateur de f. En particulier, $\mathfrak{M}_f$ divise le polynôme caractéristique P_f de f.*

Démonstration.
i) Comme $\mathfrak{M}_f$ est un polynôme annulateur de f et $\mathfrak{M}_f$ est non identiquement nul alors, d'après le théorème 4.4, on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f) \;\subset\; \mathrm{Z}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{M}_f).$$

Autrement dit, toute valeur propre de f est une racine de $\mathfrak{M}_f$. CQFD.
ii) Soit P un polynôme annulateur de f et montrons que $\mathfrak{M}_f$ divise P. Pour ce faire, on considère la division euclidienne de P sur $\mathfrak{M}_f$, qui s'écrit :

$$P \;=\; Q\mathfrak{M}_f + R,$$

avec $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg R < \deg \mathfrak{M}_f$.
Puisque $\mathfrak{M}_f$ et P annulent f alors aussi $P - Q\mathfrak{M}_f = R$ annule f. Montrons par l'absurde que R est identiquement nul. En supposant $R \neq \mathbf{0}$, on aurait trouvé un polynôme annulateur non identiquement nul de f (qui n'est rien d'autre que R) dont le degré est strictement inférieur au degré de $\mathfrak{M}_f$. Ce qui contredit manifestement la minimalité du degré de $\mathfrak{M}_f$ parmi l'ensemble des degrés des polynômes annulateurs (non identiquement nuls) de f. On a donc forcément $R = \mathbf{0}$. Il s'ensuit que l'on a $P = Q\mathfrak{M}_f$, ce qui montre que $\mathfrak{M}_f$ divise P, comme il fallait le prouver.
Enfin, puisque (d'après le théorème de Cayley-Hamilton) le polynôme caractéristique P_f de f est un polynôme annulateur de f alors (en vertu de ce qui précède) $\mathfrak{M}_f$ divise P_f. Ceci achève la preuve de la proposition. ∎

Méthode de recherche du polynôme minimal d'un endomorphisme

La méthode de recherche du polynôme minimal d'un endomorphisme donné de E découle immédiatement de la proposition 4.7. Etant donné f un endomorphisme de E, pour déterminer concrètement $\mathfrak{M}_f$, on procède comme suit :

— On calcule d'abord le polynôme caractéristique P_f de f. On suppose (sans perte de généralité) que P_f est scindé (15) sur $\mathbb{K}$.

— On factorise P_f en produit de polynômes de premiers degrés ; soit

$$P_f(X) \;=\; (-1)^n (X - x_1)^{\alpha_1} (X - x_2)^{\alpha_2} \cdots (X - x_k)^{\alpha_k},$$

avec $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts, et $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$. Les valeurs propres de f sont donc $x_1, \dots, x_k$. En vertu de la proposition 4.7, le polynôme minimal de f est de la forme :

$$\mathfrak{M}_f(X) \;=\; (X - x_1)^{\beta_1} (X - x_2)^{\beta_2} \cdots (X - x_k)^{\beta_k},$$

avec $\beta_1, \dots, \beta_k$ des entiers naturels vérifiant :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \leq & \beta_1 & \leq & \alpha_1 \\ 1 & \leq & \beta_2 & \leq & \alpha_2 \\ & & \vdots & & \\ 1 & \leq & \beta_k & \leq & \alpha_k. \end{array}$$

— On applique à l'endomorphisme f chacun des polynômes ayant la forme précédente et ceci en respectant l'ordre croissant de leurs degrés. On s'arrête dès qu'on tombe sur le premier polynôme qui annule f et ce sera le polynôme minimal de f recherché.

4.6 Une nouvelle caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Dans cette section, nous verrons une caractérisation nouvelle des endomorphismes diagonalisables qui se sert de leurs polynômes minimaux. L'outil fondamental qui nous amène à cette caractérisation est un théorème très important connu sous le nom du « lemme de la décomposition des noyaux ». Ce théorème nous servira également dans notres étude ultérieure des "espaces caractéristiques" d'un endomorphisme (cf. Chapitre 5).

(15). D'après le théorème de Steinitz (cf. page 18), on peut toujours plonger $\mathbb{K}$ dans un corps commutatif plus grand $\mathbb{K}'$ qui soit algébriquement clos, de sorte que P_f soit scindé sur $\mathbb{K}'$.

Théorème 4.8 (Le lemme de la décomposition des noyaux)**.** *Soit f un endomorphisme de E. Soient aussi k un entier strictement positif et $P = P_1 P_2 \cdots P_k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, décomposé en produit de polynômes $P_1, P_2, \dots, P_k$, deux à deux premiers entre eux. Alors, on a :*

$$\mathrm{Ker} P(f) = \mathrm{Ker} P_1(f) \oplus \mathrm{Ker} P_2(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker} P_k(f).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur k. Le cas $k = 2$ jouera le rôle principal de cette récurrence.
• Pour $k = 1$. C'est trivial.
• Pour $k = 2$. Soit $P = P_1 P_2$, avec P_1 et P_2 des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ qui sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$U(X)P_1(X) + V(X)P_2(X) = 1.$$

En appliquant les deux polynômes de cette dernière identité à l'endomorphisme f, on obtient :

$$U(f) \circ P_1(f) + V(f) \circ P_2(f) = \mathrm{Id}_E \tag{4.5}$$

Nous allons maintenant nous servir de (4.5) pour démontrer trois propriétés qui nous permettront de conclure.
<u>$1^{\text{ère}}$ propriété :</u> Nous allons montrer que $\mathrm{Ker} P_1(f) \cap \mathrm{Ker} P_2(f) = \{\mathbf{0}_E\}$.
Soit $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker} P_1(f) \cap \mathrm{Ker} P_2(f)$. Alors, on a $P_1(f)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_E$ et $P_2(f)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_E$. En utilisant (4.5), il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = \mathrm{Id}_E(\mathbf{x}) = \big(U(f) \circ P_1(f) + V(f) \circ P_2(f)\big)(\mathbf{x}) \\ = U(f)\big(\underbrace{P_1(f)(\mathbf{x})}_{=\mathbf{0}_E}\big) + V(f)\big(\underbrace{P_2(f)(\mathbf{x})}_{=\mathbf{0}_E}\big) = \mathbf{0}_E.\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{x}$ étant pris quelconque dans $\mathrm{Ker} P_1(f) \cap \mathrm{Ker} P_2(f)$, on en conclut que $\mathrm{Ker} P_1(f) \cap \mathrm{Ker} P_2(f) = \{\mathbf{0}_E\}$, comme prétendu.
<u>$2^{\text{ème}}$ propriété :</u> Nous allons montrer que $\mathrm{Ker} P(f) \subset \mathrm{Ker} P_1(f) + \mathrm{Ker} P_2(f)$.
Soit $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker} P(f)$. Donc $P(f)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_E$. En utilisant (4.5), on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = \mathrm{Id}_E(\mathbf{x}) &= \big(U(f) \circ P_1(f) + V(f) \circ P_2(f)\big)(\mathbf{x}) \\ &= \big(U(f) \circ P_1(f)\big)(\mathbf{x}) + \big(V(f) \circ P_2(f)\big)(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2,\end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{x}_1 := \big(V(f) \circ P_2(f)\big)(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_2 := \big(U(f) \circ P_1(f)\big)(\mathbf{x}).$$

Comme les endomorphismes $P_1(f), P_2(f), U(f)$ et $V(f)$ sont obtenus comme applications de polynômes à un même endomorphisme f alors (d'après les propriétés vues à la section 4.1) ils commutent deux à deux et on a par conséquent :

$$\begin{aligned} P_1(f)(\mathbf{x}_1) &= \big(P_1(f) \circ V(f) \circ P_2(f)\big)(\mathbf{x}) = \big(V(f) \circ P_1(f) \circ P_2(f)\big)(\mathbf{x}) \\ &= \big(V(f) \circ P(f)\big)(\mathbf{x}) = V(f)\big(\underbrace{P(f)(\mathbf{x})}_{=\mathbf{0}_E}\big) = \mathbf{0}_E \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} P_2(f)(\mathbf{x}_2) &= \big(P_2(f) \circ U(f) \circ P_1(f)\big)(\mathbf{x}) = \big(U(f) \circ P_1(f) \circ P_2(f)\big)(\mathbf{x}) \\ &= \big(U(f) \circ P(f)\big)(\mathbf{x}) = U(f)\big(\underbrace{P(f)(\mathbf{x})}_{=\mathbf{0}_E}\big) = \mathbf{0}_E. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\mathbf{x}_1 \in \mathrm{Ker} P_1(f)$ et $\mathbf{x}_2 \in \mathrm{Ker} P_2(f)$. D'où $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathrm{Ker} P_1(f) + \mathrm{Ker} P_2(f)$. Comme $\mathbf{x}$ étant pris quelconque dans $\mathrm{Ker} P(f)$, on en conclut que $\mathrm{Ker} P(f) \subset \mathrm{Ker} P_1(f) + \mathrm{Ker} P_2(f)$, comme prétendu.
3ème propriété : Nous allons montrer que $\mathrm{Ker} P_1(f) + \mathrm{Ker} P_2(f) \subset \mathrm{Ker} P(f)$. Comme $P = P_1 P_2 = P_2 P_1$, on a $P(f) = P_1(f) \circ P_2(f) = P_2(f) \circ P_1(f)$. Ce qui entraîne que $\mathrm{Ker} P_1(f) \subset \mathrm{Ker} P(f)$ et $\mathrm{Ker} P_2(f) \subset \mathrm{Ker} P(f)$. D'où l'on déduit que $\mathrm{Ker} P_1(f) + \mathrm{Ker} P_2(f) \subset \mathrm{Ker} P(f)$, comme prétendu.

De la première propriété résulte que la somme $\mathrm{Ker} P_1(f) + \mathrm{Ker} P_2(f)$ est directe et des deux dernières propriétés résulte que $\mathrm{Ker} P(f) = \mathrm{Ker} P_1(f) + \mathrm{Ker} P_2(f)$. En conclusion, on a :

$$\mathrm{Ker} P(f) = \mathrm{Ker} P_1(f) \oplus \mathrm{Ker} P_2(f),$$

ce qui n'est rien d'autre que la propriété du théorème pour $k = 2$.
• Soit $k \geq 2$ un entier. Supposons que la propriété du théorème est vraie pour l'entier k et montrons qu'elle reste vraie pour l'entier $(k+1)$. Soit donc $P = P_1 P_2 \cdots P_k P_{k+1}$, avec $P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, deux à deux premiers entre eux. Le fait que le polynôme P_{k+1} est premier avec chacun des polynômes P_i $(1 \leq i \leq k)$ entraîne qu'il est premier avec leur produit $P_1 P_2 \cdots P_k$. Il s'ensuit (d'après le cas "$k = 2$" déjà démontré du théorème) que l'on a :

$$\mathrm{Ker} P(f) = \mathrm{Ker}(P_1 P_2 \cdots P_k)(f) \oplus \mathrm{Ker} P_{k+1}(f).$$

Mais comme $\mathrm{Ker}(P_1 P_2 \cdots P_k)(f) = \mathrm{Ker} P_1(f) \oplus \mathrm{Ker} P_2(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker} P_k(f)$ (d'après l'hypothèse de récurrence), il en résulte que :

$$\mathrm{Ker} P(f) = \mathrm{Ker} P_1(f) \oplus \mathrm{Ker} P_2(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker} P_k(f) \oplus \mathrm{Ker} P_{k+1}(f),$$

ce qui n'est rien d'autre que la propriété du théorème pour l'entier $(k+1)$. Ce qui achève cette récurrence et cette démonstration. ∎

Nous arrivons maintenant à l'importante nouvelle caractérisation des endomorphismes diagonalisables annoncée au titre de cette section.

Théorème 4.9. *Un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.*

Démonstration. Soit f un endomorphisme de E.
• Supposons que f est diagonalisable et montrons que $\mathfrak{M}_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples. L'hypothèse "f est diagonalisable" signifie qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E suivant laquelle f est représenté par une matrice diagonale D. Quitte à réordonner les vecteurs de $\mathscr{B}$, on peut supposer que D est de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & (\mathbf{0}) & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & (\mathbf{0}) & & \lambda_p & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix},$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts, et chaque λ_i est répété un certain nombre k_i de fois (avec $k_i \in \mathbb{N}^*$). De toute évidence, ces nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ représentent les valeurs propres (deux à deux distinctes) de f et $k_1, \dots, k_p$ leurs multiplicités algébriques respectives. Une représentation par blocs de D est donnée par :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{k_1} & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & \lambda_p \mathrm{I}_{k_p} \end{pmatrix}.$$

On a donc pour tout $i = 1, \dots, p$:

$$(D - \lambda_i I_n) = \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda_i)\mathrm{I}_{k_1} & & & & & \\ & (\lambda_2 - \lambda_i)\mathrm{I}_{k_2} & & & (\mathbf{0}) & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \boxed{(\mathbf{0})} & & \\ & (\mathbf{0}) & & & \ddots & \\ & & & & & (\lambda_p - \lambda_i)\mathrm{I}_{k_p} \end{pmatrix},$$

où dans cette représentation, le $i^{\text{ème}}$ bloc diagonal est nul. Il s'ensuit de ce fait que l'on a :

$$(D - \lambda_1 \mathrm{I}_n)(D - \lambda_2 \mathrm{I}_n) \cdots (D - \lambda_p \mathrm{I}_n) = (\mathbf{0}).$$

Ceci montre que le polynôme

$$Q(X) := (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_p)$$

est un polynôme annulateur de D, donc de f. Mais puisque (d'après la proposition 4.7) le polynôme minimal $\mathfrak{M}_f$ de f divise tout polynôme annulateur de f, on en déduit que $\mathfrak{M}_f$ divise Q. D'après la proposition 4.7, on sait aussi que les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de f sont des racines de $\mathfrak{M}_f$, ce qui entraîne que $\mathfrak{M}_f$ est un multiple du polynôme $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_p) = Q(X)$. Ainsi, $\mathfrak{M}_f$ est à la fois un diviseur et un multiple de Q. Mais puisque $\mathfrak{M}_f$ et Q sont tous les deux unitaires, on en conclut que $\mathfrak{M}_f = Q$, qui est bien scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

• Inversement, supposons que le polynôme minimal $\mathfrak{M}_f$ de f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples et montrons que f est diagonalisable. D'après notre hypothèse, $\mathfrak{M}_f(X)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathfrak{M}_f(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_p),$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts. Comme les polynômes $(X - \lambda_i)$ $(1 \leq i \leq p)$ sont deux à deux premiers entre eux (car chaque deux d'entre eux sont scindés sur $\mathbb{K}$ et n'ont pas de zéro commun) alors, d'après le lemme de la décomposition des noyaux (cf. le théorème 4.8), on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \mathfrak{M}_f(f) &= \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{Id}_E) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_p \mathrm{Id}_E) \\ &= E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_p). \end{aligned}$$

Mais comme $\mathfrak{M}_f(f) = \mathbf{0}$, on a $\operatorname{Ker} \mathfrak{M}_f(f) = E$; d'où l'on conclut que :

$$E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_p) = E.$$

Ce qui montre, en vertu du théorème 2.14, que f est diagonalisable.
Le théorème est démontré. ■

Exercices

Exercice 4.1. Soient E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ et P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

1) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}P(f)$ et $\mathrm{Im}P(f)$ de E sont tous les deux stables [(1)] par f.

2) Montrer que si le polynôme P est premier avec un polynôme annulateur de f, alors l'endomorphisme $P(f)$ de E devient un automorphisme de E.

Exercice 4.2. Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :

i) $A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ii) $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

iii) $C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Pour chacune de ces matrices, dire si elle est diagonalisable ou non.

Exercice 4.3. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, exprimer A^n en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$) dans les cas suivants :

i) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

iii) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(1). Rappelons qu'un sous-espace vectoriel F de E est dit *stable* par f si $f(F) \subset F$, c'est-à-dire si : $\forall x \in F : f(x) \in F$.

Exercice 4.4.

1) Montrer que la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 9 & -3 \\ -2 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

2) En déduire le polynôme minimal de A.

3) En utilisant le polynôme minimal de A, calculer A^{-1}.

Exercice 4.5 (Examen de l'année 2013-2014).
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit :

$$A_t \ := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & t \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) En distinguant les valeurs du paramètre réel t, déterminer le polynôme minimal de A_t.

2) En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice A_t est diagonalisable.

3) On prend dans cette question $t = 0$.
— Exprimer, en utilisant la méthode de votre choix, A_0^n en fonction de n (où n est un entier naturel).

Exercice 4.6. Soit $n \geq 2$ un entier et J la matrice d'ordre n donnée par :

$$J := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

— Calculer J^2 et en déduire que J est diagonalisable.

Exercice 4.7. Soient $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M := \begin{pmatrix} \mathbf{(0)} & \frac{1}{2}J \\ \frac{1}{2}J & \mathbf{(0)} \end{pmatrix}$.

1) Calculer M^2 et M^3 et en déduire que M est diagonalisable.

2) Déterminer le polynôme minimal puis le polynôme caractéristique de M.

Exercice 4.8. Soit $n \geq 2$ un entier.

On note par $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes en X, à coefficients réels, de degrés $\leq n$.

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui associe à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ le reste de la division euclidienne de P sur $(X^2 + 4X + 5)$.

— Montrer que f est diagonalisable.
☞ Utiliser le polynôme minimal.

Exercice 4.9. Soient $n \geq 2$ un entier, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. On suppose que f^2 est diagonalisable.

1) Si $\det f \neq 0$, montrer que f est lui même diagonalisable.
☞ Utiliser le polynôme minimal.

2) Si $\det f = 0$ et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$, montrer que f est lui même diagonalisable.
☞ Utiliser le polynôme minimal.

3) <u>**Application :**</u> Montrer que la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

Exercice 4.10. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice de trace non nulle.

— Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui commute avec A^2 commute aussi avec A.

☞ Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 4.11. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et n un entier strictement positif. Soit aussi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.

— Montrer que $A^n = (\mathbf{0})$.

Exercice 4.12 (décomposition spectrale)**.**
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, notée n ($n \geq 2$).

On appelle *projecteur* de E tout endomorphisme π de E, vérifiant $\pi^2 = \pi$, avec $\pi \neq (0)$ et $\pi \neq \mathrm{Id}_E$.

1) Montrer que tout endomorphisme *diagonalisable* de E, de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ (deux-à-deux distinctes) se décompose en :

$$f = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 + \cdots + \lambda_p \pi_p \qquad (*)$$

où $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p$ sont des projecteurs de E satisfaisant :

$$\begin{cases} \pi_i \circ \pi_j = (0) \quad (\text{pour } i \neq j) & \mathbf{(1)} \\ \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_p = \mathrm{Id}_E & \mathbf{(2)} \end{cases}$$

L'équation $(*)$ s'appelle *la décomposition spectrale* de f.

2) Soit f un endomorphisme de E possédant une décomposition spectrale, c'est-à-dire une décomposition de la forme :

$$f = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 + \cdots + \lambda_p \pi_p,$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des nombres complexes deux-à-deux distincts et π_1, $\pi_2, \dots, \pi_p$ des projecteurs de E satisfaisant les identités **(1)** et **(2)**.

i) Montrer que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont forcément des valeurs propres de f.

ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^n = \lambda_1^n \pi_1 + \lambda_2^n \pi_2 + \cdots + \lambda_p^n \pi_p.$$

iii) En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a :

$$P(f) = P(\lambda_1)\pi_1 + P(\lambda_2)\pi_2 + \cdots + P(\lambda_p)\pi_p.$$

iv) En déduire que f est diagonalisable. **Conclure**.

3) **Application :** Déterminer les valeurs propres puis la décomposition spectrale de la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

— En déduire l'expression de A^n en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$).

Exercice 4.13. Soient $n \geq 2$ un entier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer la proposition suivante :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall t \in \mathbb{R} : |t| < \varepsilon \Rightarrow (\mathrm{I}_n - tA) \text{ inversible.}$$

2) Fixons nous un $\varepsilon > 0$ satisfaisant cette proposition. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| < \varepsilon$, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{tr}(A^k)}{k} t^k$ est convergente et que l'on a :

$$\det(\mathrm{I}_n - tA) = e^{-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{tr}(A^k)}{k} t^k}.$$

Exercice 4.14.

Partie I : Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, on désigne par φ l'endomorphisme qui associe à tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $XP(X)$ et par D l'endomorphisme de dérivation (i.e. qui associe à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, sa dérivée P').

— Montrer que l'on a :

$$D \circ \varphi - \varphi \circ D = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}.$$

Partie II : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas d'endomorphismes u et v de E tels que :

$$u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E.$$

Pour ce faire, on procède par l'absurde en supposant que tels endomorphismes u et v existent.

1) Montrer que l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$u^k \circ v - v \circ u^k = k u^{k-1}.$$

2) En déduire que l'on a pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(u) \circ v - v \circ P(u) = P'(u).$$

3) Conclure à une absurdité en utilisant la notion de "polynôme minimal".

4) Redémontrer le même résultat en utilisant plutôt la notion de "trace".

*

* *

Chapitre 5

Espaces caractéristiques et diagonalisation par blocs triangulaires

Pour tout ce qui suit, on fixe $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, notée n (avec $n \geq 2$).

Dans ce chapitre, nous allons élargir les espaces propres d'un endomorphisme f de E pour obtenir de nouveaux espaces qui vont servir, entre autres, à de nouveaux types de réductions forts utiles.

5.1 Espaces caractéristiques

Définition 5.1. *Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f de multiplicité algébrique k ($k \in \mathbb{N}^*$). On appelle* ***espace caractéristique*** *de f associé à la valeur propre λ, le sous-espace vectoriel de E, noté $F(\lambda)$ et défini par :*

$$F(\lambda) := \operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_E\right)^k .$$

Remarque : Dans la situation de la définition 5.1, il est immédiat que l'espace caractéristique $F(\lambda)$ contient l'espace propre $E(\lambda)$.

Nous passons maintenant à étudier les différentes propriétés des espaces caractéristiques d'un endomorphisme.

5.1.1 Propriété de stabilité

Théorème 5.2. *Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f. Alors l'espace caractéristique de f associé à λ est stable par f. Autrement dit, on a :*

$$f\left(F(\lambda)\right) \subset F(\lambda);$$

ou plus explicitement :

$$\forall \mathbf{x} \in F(\lambda) : \qquad f(\mathbf{x}) \in F(\lambda).$$

Démonstration. Appelons k la multiplicité algébrique de λ. Soit $\mathbf{x} \in F(\lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E)^k$ et montrons que $f(\mathbf{x}) \in F(\lambda)$. On a par hypothèse :

$$(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E)^k (\mathbf{x}) = \mathbf{0}_E.$$

En appliquant f, on obtient :

$$f \circ (f - \lambda \,\mathrm{Id}_E)^k (\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_E.$$

Comme l'endomorphisme $(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E)^k$ s'obtient comme application du polynôme $(X - \lambda)^k$ à f alors il commute avec f (en vertu des propriétés vues au §4.1) et on a par conséquent aussi :

$$(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E)^k \circ f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_E.$$

Ce qui montre que $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E)^k = F(\lambda)$, comme il fallait le prouver. Le théorème est démontré. ■

Remarques :

1. On peut montrer plus généralement qu'étant donné f un endomorphisme de E et P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}P(f)$ et $\mathrm{Im}P(f)$ de E sont tous les deux stables par f (voir l'exercice 4.1).
2. Etant donné f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f, la propriété de stabilité par f de l'espace caractéristique $F(\lambda)$ entraîne que l'application restreinte de f à $F(\lambda)$ est un endomorphisme de $F(\lambda)$. Cet endomorphisme restreint que l'on désignera plus loin par f_λ jouit d'importantes propriétés qu'on donnera au théorème 5.4.

5.1.2 Propriété de supplémentarité

Théorème 5.3. *Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) les valeurs propres, deux à deux distinctes, de f et $k_1, \dots, k_p$ leurs multiplicités algébriques respectives. Alors les espaces caractéristiques de f sont en somme directe et on a :*

$$F(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus F(\lambda_p) \;=\; E.$$

Démonstration. Le polynôme caractéristique P_f de f se factorise en :

$$P_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{k_i}.$$

Puisque les polynômes $(X - \lambda_i)^{k_i}$ $(1 \leq i \leq p)$ sont deux à deux sans zéro commun dans $\mathbb{C}$ alors ils sont deux à deux premiers entre eux et il s'ensuit en vertu du lemme de la décomposition des noyaux (cf. le théorème 4.8) que l'on a :

$$\mathrm{Ker} P_f(f) \;=\; \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{k_i} \;=\; \bigoplus_{i=1}^{p} F(\lambda_i).$$

Mais puisque $P_f(f) = \mathbf{0}$ (d'après le théorème de Cayley-Hamilton), on a $\mathrm{Ker} P_f(f) = E$ et l'on en conclut que $E = F(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus F(\lambda_p)$, comme il fallait le prouver. Le théorème est démontré. ■

5.1.3 Propriétés sur la dimension et sur l'endomorphisme restreint

Théorème 5.4. *Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f de multiplicité algébrique k ($k \in \mathbb{N}^*$). Alors, on a :*

$$\dim F(\lambda) \;=\; k.$$

De plus, l'endomorphisme restreint f_λ de f à l'espace caractéristique $F(\lambda)$ (i.e. $f_\lambda := f|_{F(\lambda)}$) a pour polynôme caractéristique

$$P_{f_\lambda}(X) \;=\; (-1)^k (X - \lambda)^k$$

et pour polynôme minimal

$$\mathfrak{M}_{f_\lambda}(X) \;=\; (X - \lambda)^m,$$

où l'on a désigné par m la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme minimal de f.

Démonstration. Comme, par hypothèse, λ est une valeur propre de f de multiplicité algébrique k alors le polynôme caractéristique P_f de f se factorise en :

$$P_f(X) \;=\; (X - \lambda)^k Q(X),$$

où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ qui ne s'annule pas en λ. Le fait que Q ne s'annule pas en λ entraîne que Q est premier avec le polynôme $(X - \lambda)$, ce qui entraîne que Q est premier aussi avec le polynôme $(X - \lambda)^k$. Il s'ensuit, en vertu du lemme de la décomposition des noyaux (cf. le théorème 4.8), que l'on a :

$$\mathrm{Ker} P_f(f) \; = \; \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^k \oplus \mathrm{Ker} Q(f).$$

Mais puisque $\mathrm{Ker}P_f(f) = E$ (car $P_f(f) = \mathbf{0}$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton) alors en posant $G := \mathrm{Ker}Q(f)$, il vient que :

$$E \; = \; F(\lambda) \oplus G.$$

Appelons f_λ la restriction de l'endomorphisme f à $F(\lambda)$ et g la restriction de f à G. Comme $F(\lambda)$ et G sont stables par f (en vertu du théorème 5.2 et de la remarque 1 qui vient juste après sa démonstration) alors f_λ constitue un endomorphisme de $F(\lambda)$ et g constitue un endomorphisme de G. Le fait trivial $(f_\lambda - \lambda\,\mathrm{Id}_{F(\lambda)})^k = \mathbf{0}$ montre que le polynôme $(X - \lambda)^k$ est un polynôme annulateur de f_λ. En vertu du théorème 4.4, on a donc $\mathrm{Sp}(f_\lambda) \subset \mathrm{Z}((X - \lambda)^k) = \{\lambda\}$. Par ailleurs, tout vecteur propre de f associé à la valeur propre λ appartient à $F(\lambda)$ (puisque $E(\lambda) \subset F(\lambda)$) et constitue de toute évidence un vecteur propre de f_λ dont la valeur propre associée est λ ; d'où $\lambda \in \mathrm{Sp}(f_\lambda)$. On en conclut donc que $\mathrm{Sp}(f_\lambda) = \{\lambda\}$. Il s'ensuit que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f_λ de $F(\lambda)$ est :

$$P_{f_\lambda}(X) = (\lambda - X)^d = (-1)^d (X - \lambda)^d,$$

avec $d := \dim F(\lambda)$. Nous allons montrer dans ce qui suit que $d = k$. Pour ce faire, fixons $\mathscr{B}_1$ une base de $F(\lambda)$ et $\mathscr{B}_2$ une base de $G = \mathrm{Ker}Q(f)$. La famille $\mathscr{B} := \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ constitue donc une base de E. Désignons par M_1 la matrice associée à l'endomorphisme f_λ de $F(\lambda)$ relativement à la base $\mathscr{B}_1$, par M_2 la matrice associée à l'endomorphisme g de G relativement à la base $\mathscr{B}_2$ et par M la matrice associée à l'endomorphisme f relativement à la base $\mathscr{B}$. On a clairement :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & (\mathbf{0}) \\ (\mathbf{0}) & M_2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui entraîne que l'on a :

$$P_f(X) = P_M(X) = P_{M_1}(X) P_{M_2}(X) = P_{f_\lambda}(X) P_g(X),$$

soit

$$(X - \lambda)^k Q(X) = (-1)^d (X - \lambda)^d P_g(X) \tag{$\star$}$$

Nous savons déjà que Q ne s'annule pas en λ. Nous affirmons que même P_g ne s'annule pas en λ. En effet, si P_g s'annulait en λ, ce scalaire λ serait une valeur propre pour g et il existerait $\mathbf{v} \in G$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_E$) tel que $g(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, c'est-à-dire $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Ce qui entraînerait que $\mathbf{v} \in E(\lambda) \subset F(\lambda)$ et par suite que $\mathbf{v} \in F(\lambda) \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$, ce qui est en contradiction avec $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_E$. D'où P_g ne peut s'annuler en λ. Il s'ensuit que la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme du membre de gauche de $(\star)$ est k et que la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme du membre de droite de $(\star)$ est d. D'où l'on conclut (grâce à $(\star)$) que $k = d$; autrement dit $\dim F(\lambda) = k$. Ce qui confirme la première assertion du théorème. Par suite, on a :

$$P_{f_\lambda}(X) = (-1)^d(X-\lambda)^d = (-1)^k(X-\lambda)^k,$$

ce qui confirme la deuxième assertion du théorème.
Intéressons nous maintenant au polynôme minimal de l'endomorphisme f_λ de $F(\lambda)$. Puisque $\mathfrak{M}_{f_\lambda}$ est unitaire (par définition), s'annule en λ et divise P_{f_λ} (cf. la proposition 4.7) alors, il s'écrit sous la forme :

$$\mathfrak{M}_{f_\lambda}(X) = (X-\lambda)^\alpha,$$

où α est un entier naturel vérifiant $1 \leq \alpha \leq k$.
Etant donné maintenant $P \in \mathbb{K}[X]$, il est facile de voir que l'on a :

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(M_1) & (\mathbf{0}) \\ (\mathbf{0}) & P(M_2) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, P est un polynôme annulateur de f (ou de M) si et seulement si P est un polynôme annulateur de chacune des deux matrices M_1 et M_2 ; c'est-à-dire que P est un polynôme annulateur de chacun des deux endomorphismes f_λ et g. Mais ceci équivaut à dire (en vertu de la proposition 4.7) que P est multiple de chacun des deux polynômes $\mathfrak{M}_{f_\lambda}$ et $\mathfrak{M}_g$. Maintenant, comme $\mathfrak{M}_g$ divise P_g (en vertu de la proposition 4.7) et P_g ne s'annule pas en λ (voir ci-dessus) alors $\mathfrak{M}_g$ ne s'annule pas en λ, ce qui entraîne que $\mathfrak{M}_g$ est premier avec le polynôme $(X-\lambda)$ et qu'il est par conséquent premier aussi avec $(X-\lambda)^\alpha = \mathfrak{M}_{f_\lambda}(X)$. D'où $\mathfrak{M}_{f_\lambda}$ et $\mathfrak{M}_g$ sont premiers entre eux. Dire que « P est multiple de chacun des deux polynômes $\mathfrak{M}_{f_\lambda}$ et $\mathfrak{M}_g$ » est donc équivalent à dire que « P est multiple du polynôme produit $\mathfrak{M}_{f_\lambda} \cdot \mathfrak{M}_g$ ». En récapitulant, on a : « $P \in \mathbb{K}[X]$ annule f si et seulement si P est multiple du polynôme $\mathfrak{M}_{f_\lambda} \cdot \mathfrak{M}_g$ ». Mais ceci montre (par définition même du polynôme minimal d'un endomorphisme) que le polynôme minimal de f est :

$$\mathfrak{M}_f(X) = \mathfrak{M}_{f_\lambda}(X) \cdot \mathfrak{M}_g(X) = (X-\lambda)^\alpha\, \mathfrak{M}_g(X).$$

Finalement, comme $\mathfrak{M}_g$ ne s'annule pas en λ (voir ci-dessus) alors l'entier α n'est rien d'autre que la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme minimal de f, qui est notée par m dans l'énoncé du théorème. D'où :

$$\mathfrak{M}_{f_\lambda}(X) = (X - \lambda)^\alpha = (X - \lambda)^m,$$

ce qui confirme la troisième assertion du théorème et achève cette démonstration. ■

5.1.4 Obtention d'un espace caractéristique comme limite d'une chaine croissante et stationnaire de sous-espaces vectoriels

Théorème 5.5. *Soit f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f de multiplicité algébrique k ($k \in \mathbb{N}^*$). Soit aussi m ($1 \leq m \leq k$) la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme minimal de f. Alors, on a :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \ \subsetneq\ \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^2 \ \subsetneq\ \dots\ \subsetneq\ \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^m \\ = \ \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^{m+1} \ = \ \dots \ = \ F(\lambda).\end{aligned}$$

Démonstration. Les inclusions larges :

$$\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{Id}_E)^2 \subseteq \dots$$

sont triviales.

• Montrons d'abord que pour tout entier strictement positif $r < m$, on a :

$$\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{Id}_E)^r \subsetneq \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{Id}_E)^{r+1}.$$

On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$, avec $r < m \leq k$, pour lequel on ait :

$$\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^r = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^{r+1}.$$

Une simple récurrence permet d'en déduire que l'on a pour tout entier $s \geq r$:

$$\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^r = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^s.$$

En particulier, on obtient :

$$\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^r = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^k = F(\lambda).$$

En posant $f_\lambda := f|_{F(\lambda)}$, il en résulte que l'on a :

$$\left(f_\lambda - \lambda\,\mathrm{Id}_{F(\lambda)}\right)^r = \mathbf{0}$$

(c'est-à-dire que $(f_\lambda - \lambda\,\mathrm{Id}_{F(\lambda)})^r$ est l'endomorphisme nul de $F(\lambda)$). Ceci équivaut à dire que le polynôme $(X-\lambda)^r$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme f_λ de $F(\lambda)$. Il s'ensuit (en vertu de la proposition 4.7) que ce polynôme $(X-\lambda)^r$ est un multiple du polynôme minimal de f_λ, qui est égale à $(X-\lambda)^m$ (en vertu du théorème 5.4). Mais ceci n'est possible que si $r \geq m$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse $r < m$.
On a donc effectivement pour tout $r < m$ ($r \in \mathbb{N}^*$) :

$$\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^r \subsetneq \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^{r+1}\,.$$

D'où la chaine strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E :

$$\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \subsetneq \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^m\,.$$

• Montrons maintenant que pour tout entier $s \geq m$, on a :

$$\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^s = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^m\,.$$

Soit $s \geq m$ un entier. Le polynôme minimal de f se décompose en :

$$\mathfrak{M}_f(X) = (X-\lambda)^m Q(X),$$

avec Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ ne s'annulant pas en λ. Comme $s \geq m$, le polynôme :

$$R(X) := (X-\lambda)^s Q(X)$$

est un multiple de $\mathfrak{M}_f$ et constitue donc un polynôme annulateur de f. Comme $Q(\lambda) \neq 0$, le polynôme Q est premier avec le polynôme $(X-\lambda)$ et est par conséquent premier avec chacun des deux polynômes $(X-\lambda)^m$ et $(X-\lambda)^s$. Il s'ensuit, d'après le lemme de la décomposition des noyaux (cf. le théorème 4.8), que l'on a :

$$\mathrm{Ker}\,\mathfrak{M}_f(f) \;=\; \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^m \oplus \mathrm{Ker} Q(f)$$

et

$$\mathrm{Ker} R(f) \;=\; \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^s \oplus \mathrm{Ker} Q(f).$$

Mais puisque $\mathfrak{M}_f$ et R sont tous les deux des polynômes annulateurs de f, on a $\mathrm{Ker}\,\mathfrak{M}_f(f) = \mathrm{Ker} R(f) = E$. D'où :

$$E \;=\; \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^m \oplus \mathrm{Ker} Q(f) \;=\; \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^s \oplus \mathrm{Ker} Q(f).$$

En prenant les dimensions, il vient que :

$$\begin{aligned}\dim E &= \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^m + \dim \operatorname{Ker} Q(f) \\ &= \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^s + \dim \operatorname{Ker} Q(f).\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que :

$$\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^m = \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^s .$$

Mais puisqu'on a $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^m \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^s$ (car $s \geq m$), on en conclut que $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^m = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^s$, comme il fallait le prouver.

• Enfin, puisque $k \geq m$, on a (d'après ce qui précède) $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^m = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^k = F(\lambda)$. Ainsi, en récapitulant, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \subsetneq \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^m \\ = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)^{m+1} = \dots = F(\lambda).\end{aligned}$$

Le théorème est démontré. ■

5.2 Diagonalisation par blocs triangulaires

5.2.1 Description de la réduction

Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique P_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Soient aussi $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ($p \geq 1$) les valeurs propres deux à deux distinctes de f et $k_1, \dots, k_p$ leurs multiplicités algébriques respectives. Pour alléger les écritures, on désigne par $F_1, \dots, F_p$ les espaces caractéristiques de f associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (i.e., $F_i := F(\lambda_i)$ pour $i = 1, \dots, p$). Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on note par f_i l'endomorphisme restreint de f à F_i ; soit

$$f_i := f|_{F_i}.$$

D'après le théorème 5.4, on a pour $i \in \{1, \dots, p\}$: $P_{f_i}(X) = (\lambda_i - X)^{k_i}$, et comme ce dernier polynôme est visiblement scindé sur $\mathbb{K}$ alors l'endomorphisme f_i est trigonalisable (cf. le théorème 3.5) et possède comme unique valeur propre le scalaire λ_i. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe donc une base $\mathscr{B}_i$ de F_i suivant laquelle la matrice associée à l'endomorphisme f_i de F_i, que l'on notera T_i, soit triangulaire supérieure. Par suite, puisque $E = \oplus_{i=1}^{p} F_i$

(en vertu du théorème 5.3) alors la famille $\mathscr{B} := \cup_{i=1}^{p} \mathscr{B}_i$ constitue une base de E. La matrice associée à l'endomorphisme f relativement à $\mathscr{B}$ est alors :

$$M = \begin{pmatrix} T_1 & & (\mathbf{0}) & \\ & T_2 & & \\ (\mathbf{0}) & & \ddots & \\ & & & T_p \end{pmatrix}.$$

On constate que M est une matrice *diagonale par blocs* où chaque bloc est une matrice *triangulaire supérieure*, possédant *une unique valeur propre*.

Définition 5.6. *Étant donné un endomorphisme f de E, on appelle **diagonalisation de f par blocs triangulaires** le procédé de représentation de f par une matrice **diagonale par blocs** où chaque bloc est une matrice **triangulaire supérieure**, possédant **une unique valeur propre**.*

L'analogue matriciel de cette définition est le suivant :

Définition 5.7. *Étant donnée A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **diagonalisation de A par blocs triangulaires** la recherche d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ tel que $P^{-1}AP$ soit une matrice **diagonale par blocs** où chaque bloc est une matrice **triangulaire supérieure**, possédant **une unique valeur propre**.*

5.2.2 Application pour le calcul de la puissance $k^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme ou d'une matrice

Contrairement aux réductions vues jusqu'ici, la diagonalisation par blocs triangulaires permet toujours de calculer la puissance $k^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme f de E (resp. d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), pourvu que P_f (resp. P_A) soit scindé sur $\mathbb{K}$. Comme la propriété d'être scindé sur $\mathbb{K}$ pour un polynôme n'est réellement pas une contrainte, quitte à élargir le corps commutatif $\mathbb{K}$ (voir le théorème de Steinitz, vu au §2.2, page 18), on en conclut que :

La diagonalisation par blocs triangulaires résout définitivement le problème du calcul de la puissance $k^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie (resp. d'une matrice carrée).

En effet, supposons donnés $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que P_A soit scindé sur $\mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$. Le procédé de diagonalisation par blocs triangulaires de A (décrit ci-dessus) montre l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que la matrice $U := P^{-1}AP$ soit de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} T_1 & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & T_p \end{pmatrix},$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$ et les T_i $(i = 1, \dots, p)$ sont toutes des matrices triangulaires supérieures et chacune d'elles possède une unique valeur propre. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, désignons par n_i l'ordre de la matrice T_i et par λ_i son unique valeur propre. On peut alors écrire chaque T_i $(i = 1, \dots, p)$ sous la forme :

$$T_i \;=\; \lambda_i \mathrm{I}_{n_i} + N_i,$$

avec N_i une matrice nilpotente d'ordre n_i. Ce qui permet grâce à la formule du binôme matricielle d'exprimer explicitement chaque T_i^k $(i = 1, \dots, p)$ en fonction de k, comme c'est expliqué au §3.3. D'où l'on déduit l'expression explicite de U^k en fonction de k, grâce à la formule :

$$U^k \;=\; \begin{pmatrix} T_1^k & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & T_p^k \end{pmatrix}$$

et enfin l'expression explicite de A^k en fonction de k, grâce à la formule :

$$A^k = \left(PUP^{-1}\right)^k = PU^kP^{-1}.$$

☞ Pour des applications numériques, voir l'exercice 5.1

Exercices

Exercice 5.1.

1) Diagonaliser par blocs triangulaires chacune des deux matrices suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Déterminer les expressions explicites de A^n et B^n en fonction de n (où n est un entier naturel).

Exercice 5.2. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme diagonalisable de E et F un sous-espace vectoriel de E, stable par f.

— Montrer que l'endomorphisme restreint $f|_F$ est diagonalisable.

☞ Considérer un supplémentaire G de F dans E, puis considérer une base $\mathscr{B}_1$ de F et une base $\mathscr{B}_2$ de G et écrire la forme de la matrice associée à f relativement à la base $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ de E. Ensuite, utiliser le polynôme minimal de f pour conclure.

Exercice 5.3. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient aussi f et g deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent.

1) Montrer que pour toute valeur propre λ de f, l'espace propre de f associé à λ (que l'on note $E_f(\lambda)$) est stable par g.

2) Montrer que pour toute valeur propre λ de f, l'endomorphisme restreint $g|_{E_f(\lambda)}$ de $E_f(\lambda)$ est diagonalisable (voir l'exercice 5.2).

3) En déduire qu'il existe une base de diagonalisation commune à f et g.

4) En déduire que l'endomorphisme $(f + g)$ est, lui aussi, diagonalisable.

Exercice 5.4 (Décomposition de Dunford [(1)]).
Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ($p \geq 1$) les valeurs propres (deux à deux distinctes) de f et $k_1, \dots, k_p$ leurs multiplicités algébriques respectives.

> **Rappel.** On rappelle que lorsque F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E (i.e. tels que $F \oplus G = E$), la projection (ou le projecteur) sur F parallèlement à G est l'endomorphisme de E qui associe à tout vecteur $x \in E$ -s'écrivant de manière unique $x = x_1 + x_2$ (avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$)- le vecteur x_1 de F.

Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on note par π_i la projection sur l'espace caractéristique $F(\lambda_i)$ parallèlement à l'espace $F(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus F(\lambda_{i-1}) \oplus F(\lambda_{i+1}) \oplus \cdots \oplus F(\lambda_p)$. Ces projecteurs π_i ($i = 1, \dots, p$) s'appellent "les projecteurs spectraux de f" (voir l'exercice 4.12). Considérons $\mathbf{d}$ et $\mathbf{n}$ les deux endomorphismes de E, définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &:= \lambda_1 \pi_1 + \cdots + \lambda_p \pi_p \\ \mathbf{n} &:= f - \mathbf{d}, \end{aligned}$$

de sorte qu'on ait :

$$f = \mathbf{d} + \mathbf{n}.$$

1) i) Justifier les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \pi_1 + \cdots + \pi_p &= \mathrm{Id}_E \\ \pi_i^2 &= \pi_i \qquad (\forall i \in \{1, \dots, p\}) \\ \pi_i \circ \pi_j &= \mathbf{0} \qquad (\forall i, j \in \{1, \dots, p\},\ \text{avec } i \neq j). \end{aligned}$$

ii) En déduire que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{d}^n = \lambda_1^n \pi_1 + \cdots + \lambda_p^n \pi_p.$$

iii) Montrer que l'endomorphisme $\mathbf{d}$ est diagonalisable et qu'il possède les mêmes valeurs propres que f avec les mêmes multiplicités.

2) Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on a :

$$\mathbf{n}^{k_i}|_{F(\lambda_i)} = \mathbf{0}$$

et en déduire que l'endomorphisme $\mathbf{n}$ de E est nilpotent.

(1). Nelson Dunford (1906-1986) : Mathématicien américain.

3) Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, introduisons T_i le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par :

$$T_i(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - \lambda_j)^{k_j} .$$

i) Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, justifier l'existence de deux polynômes Q_i et R_i de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$Q_i(X) T_i(X) + R_i(X) (X - \lambda_i)^{k_i} = 1.$$

ii) Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, montrer que l'on a :

$$\pi_i = (Q_i T_i)(f).$$

iii) En déduire que les deux endomorphismes $\mathbf{d}$ et $\mathbf{n}$ de E commutent.

iv) Conclure à une méthode de calcul explicite de f^n en fonction de n (où $n \in \mathbb{N}$), en se servant de la décomposition $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$.

4) Montrer l'unicité [(2)] d'un couple $(\mathbf{d}', \mathbf{n}')$ d'endomorphismes de E tels que :

$$\begin{cases} f = \mathbf{d}' + \mathbf{n}' \\ \mathbf{d}' \text{ diagonalisable} \\ \mathbf{n}' \text{ nilpotent} \\ \mathbf{d}' \text{ et } \mathbf{n}' \text{ commutent} \end{cases} .$$

☞ Raisonner par l'absurde et utiliser le résultat de la question 4) de l'exercice 5.3.

La décomposition $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$ s'appelle *la décomposition de Dunford* de l'endomorphisme f.

*
* *

(2). L'existence étant déjà prouvée au fil des questions précédentes.

Chapitre 6

Jordanisation des endomorphismes en dimension finie

Pour tout ce qui suit, on fixe $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie qu'on notera n ($n \geq 2$).

6.1 Introduction

Étant donné un endomorphisme f de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$, C. Jordan [1] a montré qu'il est toujours possible de trouver une base de E suivant laquelle f est représenté par une matrice du type :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{n-1} \\ (\mathbf{0}) & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de f (comptées avec leurs multiplicités) et $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1} \in \{0, 1\}$. Il s'agit bien d'une réduction particulière de f qu'on nomme "jordanisation" (voir plus loin).
Lorsque f est diagonalisable, on obtient simplement $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_{n-1} = 0$ mais lorsque f est seulement trigonalisable, on obtient que J est la plus simple des matrices triangulaires représentant f. La jordanisation est ainsi la meilleure réduction possible d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
Comme toutes les réductions vues jusqu'ici, la jordanisation permet de :

(1). Camille Jordan (1838-1922) : Mathématicien français.

- Calculer explicitement la puissance $k^{\text{ème}}$ d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ;
- Résoudre des systèmes d'équations différentielles linéaires (à coefficients constants) ;
- Résoudre des problèmes sur les suites récurrentes linéaires (à coefficients constants).

Dans une autre direction, la jordanisation aboutit à une classification des matrices carrées de même ordre via la relation d'équivalence $\sim$ (2) ; autrement dit, à une classification (géométrique) des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.
Néanmoins, ces divers intérêts de la jordanisation ont un prix et ce prix consiste en la complexité de l'algorithme relatif à la réduction, notamment lorsque la dimension n est assez grande.

Définition 6.1. *On appelle* ***bloc de Jordan d'ordre*** n*, toute matrice carrée d'ordre* n *s'écrivant sous la forme :*

$$J(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (\mathbf{0}) & & & \lambda \end{pmatrix},$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$*.*

Quelques propriétés simples de la matrice $J(\lambda)$.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $J = J(\lambda)$. On montre facilement que l'on a :

(i) $P_J(X) = (-1)^n (X - \lambda)^n$.

(ii) $\mathfrak{M}_J(X) = (X - \lambda)^n$.

(iii) $\dim E(\lambda) = 1$ (où $E(\lambda)$ désigne l'espace propre de J, associé à la valeur propre λ).

Remarque :

Comme $n \geq 2$, les propriétés précédentes entraînent que la matrice $J(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) n'est pas diagonalisable. En fait, la matrice $J(\lambda)$ est la plus simple de toutes les matrices qui lui sont semblables et c'est précisément pour cette raison que C. Jordan propose sa méthode de réduction des endomorphismes en se servant de ces matrices $J(\lambda)$ (voir plus loin).

(2). Pour que deux matrices carrées de même ordre soient semblables, il faut et il suffit que leurs jordanisations aboutissent à une même matrice J (à une permutation de blocs près).

6.2 Le théorème de Jordan

Théorème 6.2 (C. Jordan)**.** *Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et possède une unique racine λ de multiplicité n ; on a donc :*

$$P_f(X) = (-1)^n (X-\lambda)^n.$$

Notons par ℓ la multiplicité géométrique de la valeur propre λ de f (i.e. $\ell := \dim E(\lambda)$) et par m la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme minimal de f (donc $\mathfrak{M}_f(X) = (X-\lambda)^m$).
Alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de E suivant laquelle la matrice associée à f est de la forme :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & J_\ell(\lambda) \end{pmatrix},$$

où $J_1(\lambda), \dots, J_\ell(\lambda)$ sont des blocs de Jordan, le plus grand d'entre eux étant d'ordre m.

Appellations :
Dans la situation du théorème précédent, la base $\mathscr{B}$ de E s'appelle **base de Jordan** et le procédé qui permet de la déterminer et d'aboutir à la réduite de Jordan $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$ s'appelle **jordanisation de l'endomorphisme** f.

Remarque :
C'est au cours de la démonstration du théorème de Jordan que nous apprenons la procédure à suivre pour jordaniser un endomorphisme de E possédant une unique valeur propre. La procédure à suivre pour jordaniser un endomorphisme quelconque (c'est-à-dire un endomorphisme possédant un nombre quelconque de valeurs propres) s'en déduit immédiatement grâce à la décomposition de E en somme directe des espaces caractéristiques de l'endomorphisme en question (cf. le chapitre 5).

Pour démontrer le théorème de Jordan, on a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 6.3. *Dans la situation du théorème 6.2, posons $u := f - \lambda \mathrm{Id}_E$. Alors, il existe des sous-espaces vectoriels $M_1, M_2, \dots, M_m$ de E tels que :*

$$\begin{aligned} M_1 &= \operatorname{Ker} u \\ \operatorname{Ker}(u^{i-1}) \oplus M_i &= \operatorname{Ker}(u^i) \qquad \textit{(pour tout } 2 \le i \le m) \\ u(M_i) &\subset M_{i-1} \qquad \textit{(pour tout } 2 \le i \le m). \end{aligned}$$

Lemme 6.4. *Dans la situation du théorème 6.2, posons $u := f - \lambda \mathrm{Id}_E$ et soient $M_1, \dots, M_m$ des sous-espaces vectoriels de E, satisfaisant les propriétés citées au lemme 6.3. Pour tout $i \in \{2, \dots, m\}$, si L est une partie libre de M_i, alors $u(L)$ est une partie libre de M_{i-1}.*

Démonstration du lemme 6.3. On construit une suite $(M_i)_{1 \leq i \leq m}$ de sous-espaces vectoriels de E, satisfaisant aux propriétés exigées par le lemme 6.3, en procédant par une récurrence décroissante sur i.

• Pour $i = m$: On prend pour M_m un supplémentaire quelconque de $\mathrm{Ker}(u^{m-1})$ dans E ; soit

$$\mathrm{Ker}(u^{m-1}) \oplus M_m = E = \mathrm{Ker}(u^m).$$

• Soit $2 \leq i \leq m$: Supposons que M_i est construit de sorte qu'on ait :

$$\mathrm{Ker}(u^{i-1}) \oplus M_i = \mathrm{Ker}(u^i)$$

et construisons M_{i-1} tel que :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(u^{i-2}) \oplus M_{i-1} &= \mathrm{Ker}(u^{i-1}) \quad \text{et} \\ u(M_i) &\subset M_{i-1}. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence faite sur M_i, on montre sans peine que l'on a :

$$\begin{aligned} u(M_i) &\subset \mathrm{Ker}(u^{i-1}) \quad \text{et} \\ u(M_i) \cap \mathrm{Ker}(u^{i-2}) &= \{\mathbf{0}_E\}. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que $u(M_i)$ et $\mathrm{Ker}(u^{i-2})$ sont en somme directe et que $u(M_i) \oplus \mathrm{Ker}(u^{i-2}) \subset \mathrm{Ker}(u^{i-1})$. Considérons G_i un supplémentaire quelconque de $u(M_i) \oplus \mathrm{Ker}(u^{i-2})$ dans $\mathrm{Ker}(u^{i-1})$; soit

$$u(M_i) \oplus \mathrm{Ker}(u^{i-2}) \oplus G_i = \mathrm{Ker}(u^{i-1}).$$

Prenons par suite :

$$M_{i-1} := u(M_i) \oplus G_i.$$

Ainsi, on a bien :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(u^{i-2}) \oplus M_{i-1} &= \mathrm{Ker}(u^{i-1}) \quad \text{et} \\ u(M_i) &\subset M_{i-1}, \end{aligned}$$

comme nous le désirons.

Ce procédé de récurrence se poursuit jusqu'à M_1 qui satisfait :

$$\mathrm{Ker}(u^0) \oplus M_1 = \mathrm{Ker}\, u.$$

Mais puisque $\mathrm{Ker}(u^0) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E) = \{\mathbf{0}_E\}$, il en résulte que $M_1 = \mathrm{Ker}\, u$. Ce qui complète la preuve du lemme. ■

Démonstration du lemme 6.4. Mettons nous dans la situation du théorème 6.2 et soient $M_1, \dots, M_m$ des sous-espaces vectoriels de E, satisfaisant les propriétés citées au lemme 6.3. Soit $i \in \{2, \dots, m\}$ fixé et $L = \{x_1, \dots, x_k\}$ ($k \geq 1$) une partie libre de M_i. Montrons que $u(L) = \{u(x_1), \dots, u(x_k)\}$ est une partie libre de M_{i-1}. Remarquons d'abord que $u(L) \subset u(M_i) \subset M_{i-1}$. Montrons maintenant que $u(L)$ est libre. Soient alors $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\alpha_1 u(x_1) + \cdots + \alpha_k u(x_k) = \mathbf{0}_E$$

et montrons que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Comme u est linéaire, on a :

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(x_1) + \cdots + \alpha_k u(x_k) = \mathbf{0}_E &\iff u(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k) = \mathbf{0}_E \\ &\iff \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \in \mathrm{Ker}\, u. \end{aligned}$$

En remarquant que $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}(u^{i-1})$ (car $i \geq 2$) et que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \in M_i$ (car $x_1, \dots, x_k \in M_i$), on en déduit que :

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \in M_i \cap \mathrm{Ker}(u^{i-1}).$$

Mais comme M_i et $\mathrm{Ker}(u^{i-1})$ sont en somme directe (c'est l'une des propriétés que vérifient les sous-espaces vectoriels $M_1, \dots, M_m$ de E), on a $M_i \cap \mathrm{Ker}(u^{i-1}) = \{\mathbf{0}_E\}$ et il en résulte que :

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = \mathbf{0}_E.$$

Ce qui entraîne enfin (puisque, par hypothèse, la famille $L = \{x_1, \dots, x_k\}$ est libre) que :

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0,$$

comme il fallait le prouver. La famille $u(L)$ est bien libre. Ce qui achève cette démonstration. ■

Démonstration du théorème 6.2. Posons $u := f - \lambda\, \mathrm{Id}_E$ et soient $M_1, \dots, M_m$ des sous-espaces vectoriels de E, satisfaisant aux propriétés citées au lemme 6.3 :

$$\begin{cases} M_1 = \mathrm{Ker}\, u & \\ \mathrm{Ker}(u^{i-1}) \oplus M_i = \mathrm{Ker}(u^i) & \text{(pour tout } 2 \leq i \leq m) \\ u(M_i) \subset M_{i-1} & \text{(pour tout } 2 \leq i \leq m) \end{cases}.$$

En vertu des deux premières propriétés, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(u^m) &= \mathrm{Ker}(u^{m-1}) \oplus M_m \\ &= \mathrm{Ker}(u^{m-2}) \oplus M_{m-1} \oplus M_m \\ &\vdots \\ &= \mathrm{Ker}\, u \oplus M_2 \cdots \oplus M_m \\ &= M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_m.\end{aligned}$$

Mais comme $u^m = (f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^m = \mathfrak{M}_f(f) = \mathbf{0}$, on a $\mathrm{Ker}(u^m) = E$; d'où :

$$E = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_m \qquad (\star)$$

On construit la base de Jordan de f comme ceci :
On considère $\mathscr{B}_m$ une base de M_m. D'après le lemme 6.4, la famille $u(\mathscr{B}_m)$ est une partie libre de M_{m-1}. On complète alors $u(\mathscr{B}_m)$ par une famille $\mathscr{B}_{m-1}$ (de M_{m-1}) pour avoir une base de M_{m-1}. On disposera ainsi d'une base de M_{m-1}, qui est $u(\mathscr{B}_m) \cup \mathscr{B}_{m-1}$ et on réitère le procédé. D'après le lemme 6.4, la famille $u(u(\mathscr{B}_m) \cup \mathscr{B}_{m-1}) = u^2(\mathscr{B}_m) \cup u(\mathscr{B}_{m-1})$ est une partie libre de M_{m-2}. On complète alors cette dernière par une famille $\mathscr{B}_{m-2}$ (de M_{m-2}) pour avoir une base de M_{m-2}. On disposera alors d'une base de M_{m-2}, qui est $u^2(\mathscr{B}_m) \cup u(\mathscr{B}_{m-1}) \cup \mathscr{B}_{m-2}$. En réitérant ce procédé tant que possible, on finit par construire $\mathscr{B}_m, \mathscr{B}_{m-1}, \dots, \mathscr{B}_1$ (avec $\mathscr{B}_i \subset M_i$ pour tout $i = 1, \dots, m$) de sorte que pour tout $1 \leq i \leq m$, la famille

$$u^{m-i}(\mathscr{B}_m) \cup u^{m-i-1}(\mathscr{B}_{m-1}) \cup \cdots \cup u(\mathscr{B}_{i+1}) \cup \mathscr{B}_i$$

constitue une base de M_i.
Comme maintenant $E = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_m$ (d'après $(\star)$), il en résulte comme base de E la famille

$$\begin{aligned}\mathscr{B}' := \mathscr{B}_m \bigsqcup \big(u(\mathscr{B}_m) \cup \mathscr{B}_{m-1}\big) \bigsqcup \big(u^2(\mathscr{B}_m) \cup u(\mathscr{B}_{m-1}) \cup \mathscr{B}_{m-2}\big) \bigsqcup \dots \\ \bigsqcup \big(u^{m-1}(\mathscr{B}_m) \cup u^{m-2}(\mathscr{B}_{m-1}) \cup \cdots \cup u(\mathscr{B}_2) \cup \mathscr{B}_1\big).\end{aligned}$$

La base de Jordan qu'on recherche pour f s'obtient en réordonnant convenablement les vecteurs de $\mathscr{B}'$. Un premier réordonnement de $\mathscr{B}'$ est :

$$\begin{aligned}\mathscr{B}'' = &\big(u^{m-1}(\mathscr{B}_m) \cup u^{m-2}(\mathscr{B}_m) \cup \cdots \cup u(\mathscr{B}_m) \cup \mathscr{B}_m\big) \\ &\bigcup \big(u^{m-2}(\mathscr{B}_{m-1}) \cup u^{m-3}(\mathscr{B}_{m-1}) \cup \cdots \cup u(\mathscr{B}_{m-1}) \cup \mathscr{B}_{m-1}\big) \\ &\vdots \\ &\bigcup \big(u(\mathscr{B}_2) \cup \mathscr{B}_2\big) \\ &\bigcup \mathscr{B}_1,\end{aligned}$$

où tous les symboles "$\cup$" doivent être pris pour des réunions ordonnées.
En posant pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tout $x \in \mathscr{B}_i$:

$$\mathscr{B}^{(i,x)} := \big(u^{i-1}(x), u^{i-2}(x), \dots, u(x), x\big),$$

un réordonnement de $\mathscr{B}''$ est donné par :

$$\mathscr{B} = \bigsqcup_{\substack{1 \leq i \leq m \\ x \in \mathscr{B}_i}} \mathscr{B}^{(i,x)},$$

où le symbole "$\sqcup$" doit être pris pour une réunion (disjointe) ordonnée.
Nous allons montrer que $\mathscr{B}$ est la base de Jordan recherchée de f.
Etant donné $i \in \{1, \dots, m\}$ et $x \in \mathscr{B}_i$, on constate que l'image de tout vecteur de $\mathscr{B}^{(i,x)}$ par u reste dans $\mathscr{B}^{(i,x)}$, à l'exception du vecteur $u^{i-1}(x)$ dont l'image par u est $\mathbf{0}_E$ (puisque $\mathscr{B}_i \subset M_i \subset \mathrm{Ker}(u^i)$). Ceci entraîne que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}^{(i,x)})$ de E ($1 \leq i \leq m$, $x \in \mathscr{B}_i$) sont tous stables par u. La restriction de u à chacun des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}^{(i,x)})$ de E ($1 \leq i \leq m$, $x \in \mathscr{B}_i$) constitue donc un endomorphisme de $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}^{(i,x)})$; de plus, la matrice associée à l'endomorphisme restreint $u|_{\mathrm{Vect}(\mathscr{B}^{(i,x)})}$ de $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}^{(i,x)})$ relativement à la base $\mathscr{B}^{(i,x)}$ de $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}^{(i,x)})$ est clairement égale à :

$$J^{(i,x)}(0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (\mathbf{0}) & & & 0 \end{pmatrix},$$

qui est un bloc de Jordan d'ordre i. Il s'ensuit que la matrice associée à u relativement à la base $\mathscr{B}$ de E est

$$\begin{pmatrix} J_1(0) & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & J_r(0) \end{pmatrix},$$

où $J_1(0), \dots, J_r(0)$ sont les blocs de Jordan $J^{(i,x)}(0)$ ($1 \leq i \leq m, x \in \mathscr{B}_i$) dont les ordres varient de 1 à m et leur nombre r est donné par :

$$r = \sum_{1 \leq i \leq m} \mathrm{Card}\, \mathscr{B}_i.$$

D'où l'on conclut que la matrice associée à $f = u + \lambda\, \mathrm{Id}_E$ relativement à $\mathscr{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} J_1(\lambda) & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & J_r(\lambda) \end{pmatrix},$$

où $J_1(\lambda), \dots, J_r(\lambda)$ sont des blocs de Jordan dont les ordres varient entre 1 et m. Pour compléter la preuve du théorème, il ne reste qu'à montrer que $r = \ell$. Pour ce faire, on constate que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, l'application linéaire $u^{i-1}|_{M_i}$ est injective (en effet, son noyau est $\mathrm{Ker}(u^{i-1}) \cap M_i = \{\mathbf{0}_E\}$, puisque $\mathrm{Ker}(u^{i-1})$ et M_i sont en somme directe) ; ce qui entraîne que l'on a pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$: $\mathrm{Card}\,\mathscr{B}_i = \mathrm{Card}\,u^{i-1}(\mathscr{B}_i)$. D'où :

$$\begin{aligned}
r &= \sum_{1 \leq i \leq m} \mathrm{Card}\,\mathscr{B}_i \\
&= \sum_{1 \leq i \leq m} \mathrm{Card}\,u^{i-1}(\mathscr{B}_i) \\
&= \mathrm{Card}\,\mathscr{B}_1 + \mathrm{Card}\,u(\mathscr{B}_2) + \dots + \mathrm{Card}\,u^{m-1}(\mathscr{B}_m) \\
&= \mathrm{Card}\,\big(\mathscr{B}_1 \sqcup u(\mathscr{B}_2) \sqcup \dots \sqcup u^{m-1}(\mathscr{B}_m)\big) \\
&= \dim M_1 \qquad \big(\text{car } \mathscr{B}_1 \sqcup u(\mathscr{B}_2) \sqcup \dots \sqcup u^{m-1}(\mathscr{B}_m) \\
&\qquad\qquad\qquad \text{constitue une base pour } M_1\big) \\
&= \dim \mathrm{Ker}\,u \\
&= \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = \dim E(\lambda) = \mathbf{m_g}(\lambda) = \ell,
\end{aligned}$$

comme il fallait le prouver. Ce qui complète cette démonstration. ■

Corollaire 6.5 (C. Jordan)**.** *Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Soient aussi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f, comptées avec leurs multiplicités. Alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de E suivant laquelle la matrice associée à f est de la forme :*

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{n-1} \\ (\mathbf{0}) & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

avec $\delta_1, \dots, \delta_{n-1} \in \{0, 1\}$.

Appellations :

Dans la situation du corollaire précédent, la base $\mathscr{B}$ de E s'appelle **base de Jordan** et le procédé qui permet de la déterminer et d'aboutir à la réduite de Jordan $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$ s'appelle **jordanisation de l'endomorphisme** f.

Démonstration du corollaire 6.5. Notons par $\lambda'_1, \dots \lambda'_p$ $(p \geq 1)$ les valeurs propres, deux à deux distinctes, de f. On a vu au chapitre 5 que l'espace vectoriel E se décompose en somme directe des espaces caractéristiques de f ; soit

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F(\lambda_i').$$

On a vu aussi que chacun de ces espaces caractéristiques $F(\lambda_i')$ est stable par f et que chacun des endomorphismes restreints $f_i := f|_{F(\lambda_i')}$ de $F(\lambda_i')$ possède une unique valeur propre, qui est λ_i'. On peut alors appliquer le théorème 6.2 pour chacun de ces endomorphismes f_i de $F(\lambda_i')$ $(1 \leq i \leq p)$. On obtient l'existence, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, d'une base $\mathscr{B}_i$ de $F(\lambda_i')$, suivant laquelle la matrice associée à f_i est de la forme :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}_i}(f_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i' & \alpha_1 & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_{k_i-1} \\ (\mathbf{0}) & & & \lambda_i' \end{pmatrix},$$

avec $k_i := \dim F(\lambda_i') = \mathbf{m_a}(\lambda_i')$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_i-1} \in \{0, 1\}$.
Il en résulte que la matrice associée à f relativement à la base $\mathscr{B} := \bigcup_{1 \leq i \leq p} \mathscr{B}_i$ de E est :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathscr{M}_{\mathscr{B}_1}(f_1) & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & \mathscr{M}_{\mathscr{B}_p}(f_p) \end{pmatrix},$$

qui a bien la forme requise par le corollaire. La démonstration est achevée. ■

6.3 Jordanisation des endomorphismes en pratique

Supposons donné un endomorphisme f de E, de polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$. Soit A une matrice représentant f relativement à une base choisie de E. Pour jordaniser f (ou A), on doit effectuer pour toute valeur propre λ de f, les étapes suivantes :

1. On détermine les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$:

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{I}_n)\ ,\ \mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{I}_n)^2\ ,\ \mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{I}_n)^3\ ,\ \dots$$

jusqu'à ce qu'on arrive à celui de dimension maximale (i.e. de dimension $\mathbf{m_a}(\lambda)$), qui n'est rien d'autre que $F(\lambda)$ (cf. le chapitre 5). Appelons m

le plus petit entier positif satisfaisant

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda\, \mathrm{I}_n)^m = F(\lambda).$$

Aussi, pour simplifier, posons $N := A - \lambda\, \mathrm{I}_n$ et appelons u l'endomorphisme associé à N relativement à la base choisie initialement pour E. On a (cf. le chapitre 5) :

$$\operatorname{Ker} N \subsetneq \operatorname{Ker}(N^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker}(N^m) = F(\lambda).$$

2. – On complète une base de $\operatorname{Ker}(N^{m-1})$ pour avoir une base de $\operatorname{Ker}(N^m)$. Soit $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$ cette complétion. La famille $(N(\mathbf{v}_1), N(\mathbf{v}_2), \dots)$ est alors une partie libre de $\operatorname{Ker}(N^{m-1})$ qui engendre un sous-espace vectoriel de E, d'intersection nulle avec $\operatorname{Ker}(N^{m-2})$.

   – On complète ensuite une base de $\operatorname{Ker}(N^{m-2}) \oplus \operatorname{Vect}(N(\mathbf{v}_1), N(\mathbf{v}_2), \dots)$ pour avoir une base de $\operatorname{Ker}(N^{m-1})$. Soit $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots)$ cette complétion. La famille $(N^2(\mathbf{v}_1), N^2(\mathbf{v}_2), \dots, N(\mathbf{w}_1), N(\mathbf{w}_2), \dots)$ constitue alors une partie libre de $\operatorname{Ker}(N^{m-2})$ qui engendre un sous-espace vectoriel de E, d'intersection nulle avec $\operatorname{Ker}(N^{m-3})$.

   – On complète ensuite une base de

   $$\operatorname{Ker}(N^{m-3}) \oplus \operatorname{Vect}\big(N^2(\mathbf{v}_1), N^2(\mathbf{v}_2), \dots, N(\mathbf{w}_1), N(\mathbf{w}_2), \dots\big)$$

   pour avoir une base de $\operatorname{Ker}(N^{m-2})$. Soit $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots)$ cette complétion. La famille

   $$\big(N^3(\mathbf{v}_1), N^3(\mathbf{v}_2), \dots, N^2(\mathbf{w}_1), N^2(\mathbf{w}_2), \dots, N(\mathbf{x}_1), N(\mathbf{x}_2), \dots\big)$$

   constitue alors une partie libre de $\operatorname{Ker}(N^{m-3})$ qui engendre un sous-espace vectoriel de E, d'intersection nulle avec $\operatorname{Ker}(N^{m-4})$.

   $\vdots$

   $\vdots$

   – À l'avant dernière étape, on complètera une base de

   $$\operatorname{Ker} N \oplus \operatorname{Vect}\big(N^{m-2}(\mathbf{v}_1), N^{m-2}(\mathbf{v}_2), \dots, N^{m-3}(\mathbf{w}_1), N^{m-3}(\mathbf{w}_2), \dots\big)$$

   pour avoir une base de $\operatorname{Ker}(N^2)$. Soit $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots)$ cette complétion. La famille

   $$\big(N^{m-1}(\mathbf{v}_1), N^{m-1}(\mathbf{v}_2), \dots, N^{m-2}(\mathbf{w}_1), N^{m-2}(\mathbf{w}_2), \dots, N(\mathbf{y}_1), N(\mathbf{y}_2), \dots\big)$$

   constitue alors une partie libre de $\operatorname{Ker} N$.

– À la dernière étape, on complètera la partie libre de $\operatorname{Ker} N$, obtenue dernièrement, pour avoir une base de $\operatorname{Ker} N$. Soit $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots)$ cette complétion. Une base de $\operatorname{Ker} N$ est alors :

$$\big(N^{m-1}(\mathbf{v}_1), N^{m-1}(\mathbf{v}_2), \dots, N^{m-2}(\mathbf{w}_1), N^{m-2}(\mathbf{w}_2), \dots,\\ N(\mathbf{y}_1), N(\mathbf{y}_2), \dots, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots\big).$$

3. En réunissant cette dernière base de $\operatorname{Ker} N$ avec toutes les bases obtenues au cours des étapes précédentes pour des supplémentaires de $\operatorname{Ker}(N^i)$ dans $\operatorname{Ker}(N^{i+1})$ $(1 \leq i \leq m-1)$, on obtient de toute évidence une base de $\operatorname{Ker}(N^m) = F(\lambda)$. Mais, on doit réordonner les vecteurs de cette dernière comme ceci :

$$\begin{aligned}\big(&N^{m-1}(\mathbf{v}_1), N^{m-2}(\mathbf{v}_1), \dots, \mathbf{v}_1, N^{m-1}(\mathbf{v}_2), N^{m-2}(\mathbf{v}_2), \dots, \mathbf{v}_2, \dots\\ &N^{m-2}(\mathbf{w}_1), N^{m-3}(\mathbf{w}_1), \dots, \mathbf{w}_1, N^{m-2}(\mathbf{w}_2), N^{m-3}(\mathbf{w}_2), \dots, \mathbf{w}_2, \dots\\ &\quad\vdots\\ &N(\mathbf{y}_1), \mathbf{y}_1, N(\mathbf{y}_2), \mathbf{y}_2, \dots\\ &\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots\big)\end{aligned}$$

pour obtenir une base de Jordan de $u|_{F(\lambda)}$, donc aussi de $f|_{F(\lambda)}$.

Enfin, une base de Jordan de f s'obtient simplement en réunissant toutes les bases de Jordan des endomorphismes restreints $f|_{F(\lambda)}$ $(\lambda \in \operatorname{Sp}(f))$.

6.4 Exemples numériques

Exemple 1 : Soit à jordaniser la matrice réelle d'ordre 4 suivante :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}_4) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^4. \end{aligned}$$

Le polynôme P_A possède une unique racine, qui est $\lambda_1 = 1$ et qui est de multiplicité 4. Ce qui entraîne que la matrice A possède une unique valeur propre $\lambda_1 = 1$, qui est de multiplicité algébrique 4. Par suite, les calculs donnent :

$$\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \text{ , avec } \mathbf{x}_1 =^t (1,1,0,0) \text{ et } \mathbf{x}_2 =^t (2,0,1,1) \text{ ;}$$

$$\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_4)^2 = \mathrm{Vect}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) \text{ , avec } \mathbf{y}_1 =^t (1,0,0,0) \text{ , } \mathbf{y}_2 =^t (0,1,0,0) \text{ et } \mathbf{y}_3 =^t (0,0,1,1)$$

et

$$\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_4)^3 = \mathbb{R}^4.$$

On complète la base $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$ de $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_4)^2$ pour obtenir une base de $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_4)^3 = \mathbb{R}^4$. On peut réaliser cette complétion avec $\mathbf{v}_1 =^t (0,0,1,0)$. On a $(A - \mathrm{I}_4)\mathbf{v}_1 =^t (1,0,0,0)$. On complète par suite une base de $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_4) \oplus \mathrm{Vect}((A - \mathrm{I}_4)\mathbf{v}_1) = \mathrm{Vect}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, (A - \mathrm{I}_4)\mathbf{v}_1)$ pour obtenir une base de $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_4)^2$. Cette complétion est vide car les deux espaces vectoriels en question sont de même dimension (égale à 3). On complète enfin le vecteur $(A - \mathrm{I}_4)^2\mathbf{v}_1 =^t (-1,-1,0,0) = -\mathbf{x}_1$ pour avoir une base de $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_4)$. On complète simplement par $\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 =^t (2,0,1,1)$. Une base de Jordan de A est donc donnée par :

$$\begin{aligned}\mathscr{B} &= \left\{ (A - \mathrm{I}_4)^2\mathbf{v}_1 \text{ , } (A - \mathrm{I}_4)\mathbf{v}_1 \text{ , } \mathbf{v}_1 \text{ , } \mathbf{v}_2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

En appelant f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ qui représente A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice représentant f relativement à $\mathscr{B}$ est :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est la réduite de Jordan de f (donc de A).

Enfin, la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathscr{B}$ est :

$$P := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a par conséquent :
$$J = P^{-1}AP.$$

Exemple 2 : Soit à jordaniser la matrice réelle d'ordre 5 suivante :

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Désignons par g l'endomorphisme représentant B relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Le polynôme caractéristique de B (ou de g) est :

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) := \det(B - \lambda\,\mathrm{I}_5) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^3(2-\lambda)^2. \end{aligned}$$

On voit que P_B est scindé sur $\mathbb{R}$ et possède deux racines $\lambda_1 = 1$ (racine triple) et $\lambda_2 = 2$ (racine double). Ce qui montre que B possède deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$, qui est de multiplicité algébrique 3 et $\lambda_2 = 2$, qui est de multiplicité algébrique 2. Commençons par déterminer les sous-espaces $\mathrm{Ker}(B - \mathrm{I}_5)^m$ ($m \geq 1$) jusqu'à arriver à celui de dimension maximale, qui va être $F(1)$ (i.e. l'espace caractéristique de B associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$) et qui est de dimension $\mathbf{m_a}(\lambda_1) = 3$. Les calculs donnent :

$$\mathrm{Ker}(B - \mathrm{I}_5) = \mathrm{Vect}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\ ,\ \text{avec } \mathbf{x}_1 =^t (1,0,1,0,0) \text{ et } \mathbf{x}_2 =^t (0,1,1,0,0)$$

et

$$\mathrm{Ker}(B - \mathrm{I}_5)^2 = \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\ ,\ \text{avec } \mathbf{e}_1 =^t (1,0,0,0,0)\ ,\ \mathbf{e}_2 =^t (0,1,0,0,0) \text{ et } \mathbf{e}_3 =^t (0,0,1,0,0).$$

Comme $\dim \operatorname{Ker}(B - \mathrm{I}_5)^2 = 3 = \mathbf{m_a}(1)$, alors $\operatorname{Ker}(B - \mathrm{I}_5)^2 = F(1)$.
On complète la base $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ de $\operatorname{Ker}(B - \mathrm{I}_5)$ pour obtenir une base de $\operatorname{Ker}(B - \mathrm{I}_5)^2$. On peut réaliser cette complétion avec le vecteur $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 =^t (1,0,0,0,0)$. On a $(B - \mathrm{I}_5)\mathbf{v}_1 =^t (0,1,1,0,0)$. On complète ensuite ce dernier vecteur $(B - \mathrm{I}_5)\mathbf{v}_1$ pour avoir une base de $\operatorname{Ker}(B - \mathrm{I}_5)$. On peut réaliser cette complétion avec le vecteur $\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_1 =^t (1,0,1,0,0)$. La base de Jordan qui en résulte pour l'endomorphisme restreint $g|_{F(1)}$ est alors :

$$\mathscr{B}_1 = \big((B - \mathrm{I}_5)\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\big) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et la matrice représentant $g|_{F(1)}$ relativement à $\mathscr{B}_1$ est :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la même procédure, nous allons chercher une base de Jordan pour $g|_{F(2)}$. Nous allons donc déterminer les sous-espaces $\operatorname{Ker}(B - 2\,\mathrm{I}_5)^m$ $(m \geq 1)$ jusqu'à arriver à celui de dimension maximale, qui va être $F(2)$ et qui est de dimension $\mathbf{m_a}(2) = 2$. Les calculs donnent :

$$\operatorname{Ker}(B - 2\,\mathrm{I}_5) = \operatorname{Vect}(\mathbf{y}_1)\ ,\ \text{avec } \mathbf{y}_1 =^t (1,2,2,1,0)$$

et

$$\operatorname{Ker}(B - 2\,\mathrm{I}_5)^2 = \operatorname{Vect}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2),\ \text{avec } \mathbf{z}_1 =^t (1,0,0,1,2) \text{ et } \mathbf{z}_2 =^t (0,1,1,0,-1).$$

Comme $\dim \operatorname{Ker}(B - 2\,\mathrm{I}_5)^2 = 2 = \mathbf{m_a}(2)$, on a forcément $\operatorname{Ker}(B - 2\,\mathrm{I}_5)^2 = F(2)$. On complète le vecteur $\mathbf{y}_1$ de $\operatorname{Ker}(B - 2\,\mathrm{I}_5)$ pour avoir une base de $\operatorname{Ker}(B - 2\,\mathrm{I}_5)^2$. On peut réaliser cette complétion avec le vecteur $\mathbf{w}_1 = \mathbf{z}_1 = {}^t(1,0,0,1,2)$. On a $(B - 2\,\mathrm{I}_5)\mathbf{w}_1 =^t (2,4,4,2,0) = 2\mathbf{y}_1$. Nous devons ensuite compléter ce dernier vecteur $(B - 2\,\mathrm{I}_5)\mathbf{w}_1$ pour avoir une base de $\operatorname{Ker}(B - 2\,\mathrm{I}_5)$, mais cette complétion est clairement vide. La base de Jordan qui en résulte pour l'endomorphisme restreint $g|_{F(2)}$ est alors :

$$\mathscr{B}_2 = \big((B - 2\,\mathrm{I}_5)\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1\big) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

et la matrice représentant $g|_{F(2)}$ relativement à $\mathscr{B}_2$ est :

$$J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Une base de Jordan $\mathscr{B}$ pour l'endomorphisme g s'obtient en prenant la réunion des deux bases de Jordan, obtenues précédemment pour les endomorphismes restreints $g|_{F(1)}$ et $g|_{F(2)}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 &= \big((B - \mathrm{I}_5)\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, (B - 2\,\mathrm{I}_5)\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1\big) \\ &= \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

et la matrice représentant g relativement à $\mathscr{B}$ est :

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & (\mathbf{0}) \\ (\mathbf{0}) & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

qui est la réduite de Jordan de g (donc de B).
Enfin, la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^5$ vers $\mathscr{B}$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et le changement de base correspondant s'interprète par la formule matricielle :

$$J = P^{-1}BP.$$

Exercices

Exercice 6.1. Jordaniser chacune des matrices réelles suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad E := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.2. En distinguant les valeurs du paramètre réel k, déterminer la réduite de Jordan de la matrice réelle d'ordre 4 suivante :

$$A \ := \begin{pmatrix} 3 & 2 & k & 1 \\ -2 & -1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.3. Soit $A \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (\lambda-2)^5(\lambda-4)^3 \\ \mathfrak{M}_A(\lambda) &= (\lambda-2)^3(\lambda-4)^2. \end{aligned}$$

1) Déterminer les réduites de Jordan possibles pour A.

2) En déduire les valeurs possibles pour les dimensions des espaces propres de A.

Exercice 6.4. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et n un entier ≥ 2. Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note par j_i le nombre de blocs de Jordan d'ordre i, ayant pour valeur propre λ, dans une réduite de Jordan de A. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note aussi par d_i l'entier naturel : $d_i := \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{I}_n)^i$.
— Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$j_i \ = \ 2d_i - d_{i-1} - d_{i+1}.$$

$\boxed{☞}$ Réviser la démonstration du théorème de Jordan (i.e. le théorème 6.2).

Exercice 6.5. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et n un entier ≥ 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} P_A(X) & = & (-1)^n (X-\lambda)^n \\ \mathfrak{M}_A(X) & = & (X-\lambda)^m \\ \dim E(\lambda) & = & \ell, \end{array}$$

avec $m, \ell \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

— Montrer la double inégalité :

$$\frac{n}{m} \leq \ell \leq n - m + 1.$$

Exercice 6.6. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $A \sim {}^t A$.

☞ Montrer d'abord la propriété pour un bloc de Jordan ; utiliser ensuite les réduites de Jordan pour montrer la propriété dans son cas général.

*

* *

Chapitre 7

Application de la théorie de la réduction des endomorphismes aux problèmes mathématiques concrets

7.1 Application à la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires

Problème 1. Résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -7x + 8y + 4z \\ y' & = & -3x + 4y + z \\ z' & = & -6x + 6y + 5z \end{array}\right. \qquad (S)$$

où x, y et z désignent des fonctions réelles en la variable réelle t.

Solution. Introduisons $\mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par :

$$\mathbf{u}(t) \;=\; \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

Le système d'équations différentielles (S) s'écrit donc :

$$\mathbf{u}'(t) \;=\; A\,\mathbf{u}(t),$$

avec

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} -7 & 8 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \\ -6 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre le système (S), nous allons réduire la matrice A. Le calcul du polynôme caractéristique de A donne :

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Les valeurs propres de A sont les racines de P_A ; ce sont donc $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 2$. Par ailleurs, nous remarquons que P_A est scindé et a toutes ses racines simples, ce qui montre que A est diagonalisable. Procédons à la diagonalisation de A. Le calcul des espaces propres de A donne :

$$\begin{array}{rcl} E(1) & = & \mathrm{Vect}(V_1), \quad \text{avec} \quad V_1 = {}^t(1,1,0) \\ E(-1) & = & \mathrm{Vect}(V_2), \quad \text{avec} \quad V_2 = {}^t(2,1,1) \\ E(2) & = & \mathrm{Vect}(V_3), \quad \text{avec} \quad V_3 = {}^t(0,1,-2). \end{array}$$

La famille $\mathscr{B} = (V_1, V_2, V_3)$, constituée de vecteurs propres de A, est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathscr{B}$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

En appelant f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice associée à f relativement à $\mathscr{B}$ est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et on a d'après la formule de changement de base :

$$D = P^{-1}AP.$$

Revenons maintenant à notre système d'équations différentielles. Nous simplifions (S) en introduisant la nouvelle fonction vectorielle :

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{v} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} x_*(t) \\ y_*(t) \\ z_*(t) \end{pmatrix} := P^{-1}\mathbf{u}(t) \end{array}.$$

On a donc $\mathbf{u}(t) = P\mathbf{v}(t)$, ce qui entraîne $\mathbf{u}'(t) = P\mathbf{v}'(t)$. Par suite, on a :

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t) \\
&\iff P\mathbf{v}'(t) = AP\mathbf{v}(t) \\
&\iff \mathbf{v}'(t) = P^{-1}AP\mathbf{v}(t) \\
&\iff \mathbf{v}'(t) = D\mathbf{v}(t) \\
&\iff \begin{cases} x_*'(t) = x_*(t) \\ y_*'(t) = -y_*(t) \\ z_*'(t) = 2z_*(t) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_*(t) = c_1 e^t \\ y_*(t) = c_2 e^{-t} \\ z_*(t) = c_3 e^{2t} \end{cases} \qquad (\text{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}) \\
&\iff \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \mathbf{u}(t) = P\mathbf{v}(t) = P \begin{pmatrix} x_*(t) \\ y_*(t) \\ z_*(t) \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{-t} \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + 2c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} \\ c_2 e^{-t} - 2c_3 e^{2t} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Conclusion : La solution générale du système d'équations différentielles (S) est :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) &= c_1 e^t + 2c_2 e^{-t} \\ y(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} \\ z(t) &= c_2 e^{-t} - 2c_3 e^{2t} \end{cases}} \qquad (\text{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

■

Problème 2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle linéaire :

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \qquad (\mathscr{E})$$

où y est une fonction réelle d'une variable réelle t.

Solution. Pour toute fonction réelle d'une variable réelle y, deux fois dérivable, on introduit :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \varphi(t) := \begin{pmatrix} y''(t) \\ y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (\mathscr{E}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \varphi'(t) = \begin{pmatrix} y'''(t) \\ y''(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3y'' - 3y' + y)(t) \\ y''(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y''(t) \\ y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi'(t) = A\varphi(t), \end{aligned}$$

avec

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre $(\mathscr{E})$, on réduit [(1)] la matrice A puis on procède exactement comme dans le problème précédent. On trouve que la solution générale de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ est :

$$y(t) = (at^2 + bt + c)e^t, \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

■

7.2 Application aux problèmes sur les suites récurrentes

Problème 3. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites réelles définies par : $x_0 = 1$, $y_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n - 3y_n \\ y_{n+1} &= x_n + 5y_n \end{cases}.$$

1) Calculer quelques termes de ces suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$.

2) Trouver des expressions closes pour x_n et y_n en fonction de n.

Solution.
1) Les calculs donnent : $x_1 = -8$, $y_1 = 16$ puis $x_2 = -56$, $y_2 = 72$, …etc.

(1). La matrice A n'est pas diagonalisable ; on peut la trigonaliser par exemple.

2) Posons $V_n := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_{n+1} = AV_n,$$

où A est la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = A^n V_0.$$

Le problème est ainsi amené à calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ de A ($n \in \mathbb{N}$). Réduisons alors A. Le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4).$$

Comme P_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples alors A est diagonalisable. Les valeurs propres de A sont les racines de P_A ; ce sont donc $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$. Les calculs des espaces propres de A donnent :

$$E(2) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad E(4) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

On a par conséquent : $A = PDP^{-1}$, avec :

$$P := \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Ce qui donne :

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2}2^n - \dfrac{1}{2}4^n & \dfrac{3}{2}2^n - \dfrac{3}{2}4^n \\ -\dfrac{1}{2}2^n + \dfrac{1}{2}4^n & -\dfrac{1}{2}2^n + \dfrac{3}{2}4^n \end{pmatrix} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Et par suite :

$$V_n = A^n V_0 = \begin{pmatrix} 6 \cdot 2^n - 5 \cdot 4^n \\ -2^{n+1} + 5 \cdot 4^n \end{pmatrix} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Il en résulte enfin que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x_n & = & 6 \cdot 2^n - 5 \cdot 4^n \\ y_n & = & -2^{n+1} + 5 \cdot 4^n \end{array}}.$$

■

Problème 4 (La suite de Fibonacci [2]). ***non résolu***

La suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite réelle définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

1) Calculer quelques termes de la suite de Fibonacci.

2) Exprimer F_n en fonction de n puis déterminer la limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

☞ Poser pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$ et montrer que $V_{n+1} = AV_n$ (pour une certaine matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$). Poursuivre comme dans le problème précédent.

(2). Leonardo Fibonacci (1175-1250) : Mathématicien italien. Il a appris les mathématiques à la ville de Béjaia (en Algérie) et il est le premier ayant introduit les chiffres arabes et les mathématiques arabes en générale en europe, à l'époque où tout l'occident utilisait encore les chiffres romains !

Bibliographie

[1] J.M. Arnaudiès, MATHEMATIQUES (14 problèmes corrigés posés à l'agrégation interne avec une théorie de la réduction des endomorphismes), *Édition Broché*, 1998.

[2] J.M. Arnaudiès & H. Fraysse, Cours de Mathématiques T 1, Algèbre, *Dunod Université*, 1987.

[3] M. Artin, Algebra, Chapitre 4, *Prentice Hall Inc*, 1991.

[4] M. Boucetta & J.M. Morvan, Réduction des Endomorphismes (Exercices corrigés avec rappels de cours), *Éditions Cépaduès*, 2007.

[5] A. Brada, APPLICATIONS LINEAIRES : Réduction des endomorphismes, *Éditions Broché*, 1997.

[6] L. Chambadal & J-L Ovaert, Cours de Mathématiques (Algèbre II), Chapitre 5, *Édition Gauthier-Villars*, 1972.

[7] J. Grifone, Algèbre linéaire, Chapitre 6, *Éditions Cépaduès*, 4ème édition, 2011.

[8] R. Mansury & R. Mneimné, Algèbre linéaire - Réduction des endomorphismes, *Édition Broché*, 2012.

[9] D.J. Mercier, Réduction des endomorphismes, *Éditions CSIPP*, 2014.

[10] F.P. Miller & A.F. Vandome, Endomorphisme nilpotent, *Éditions Broché*, 2010.