Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de MI L3-Maths Équations différentielles

Controle finale :09/02/2022

Sujet
A

Exercice 1

Résoudre sur R l'équations différentielles suivantes:

1. $y' = y$.
2. $y' = (1 - y)y$.
3. $y'' - 7y' + 12y = 2xe^x$.
4. $y' = x\cos(x)y$.

Exercice 2

Soit le problème de Cauchy (E):

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) - 5e^{-t}x(t)^5 = 0 \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

1. Donner l'ordre de E et établir si elle est linéaire ou non-linéaire, et autonome ou non-autonome et le type de E.
2. Énoncer le théorème d'existence d'une solution du problème de Cauchy.
3. Montrer que le problème possède une solution maximale unique.
4. Quelles sont les solutions stationnaires de l'EDO.
5. Montrer que si une solution de (E) s'annule en un point, alors c'est la solution nulle.
6. déterminer la solution maximale de (E) avec $x(1) = 0$.

Exercice 3

On considère le système différentielle (S) suivante:

$$\begin{cases} x'(t) = (3t - 1)x(t) + (t - 1)y(t) \\ y'(t) = -(t + 2)x(t) + (t - 2)y(t) \end{cases}$$

1. Écrire le système (S) sous forme matricielle $X' = AX$.
2. Montre que le polynôme caractéristique de A est: $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + (3 - 4t)\lambda + 4t^2 - 6t$.
3. Résoudre le système pour $t \in R - \{-2, 1\}$ et étudier la stabilité de l'origine pour $t = 2$.

Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de MI **L3-Maths Équations différentielles**

Correction -Controle finale :09/02/2022-

Sujet A

Exercice 1

Résoudre sur R l'équations différentielles suivantes:

1. $y' = y. \Rightarrow y(x) = Ce^x$
   $y' = (1-y)y. \Rightarrow \frac{y'}{(1-y)y} = 1 \Rightarrow (\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y})dy = dx \Rightarrow \ln \frac{y}{1-y} = x + C \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{e^{x+C}+1}$
2. $y'' - 7y' + 12y = 2xe^x. \Rightarrow r_1 = 3, r_2 = 4 \Rightarrow y_H = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + ((1/3)x + 5/18)e^x$
3. $y' = x\cos(x)y \Rightarrow y = Ce^{\int x\cos(x)dx} = Ce^{x\sin(x)+\cos(x)}$

Exercice 2

Soit le problème de Cauchy (E):

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) - 5e^{-t}x(t)^5 = 0 \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

1. Donner l'ordre de E et établir si elle est linéaire ou non-linéaire, et autonome ou non-autonome et le type de E.
   $E : x'(t) = -x(t) + 5e^{-t}x(t)^5$ alors est une Éq diff d'ordre 1 de degré 1 non linéaire (on a x^5) non autonome (on e^{-t}) et c'est une eq de Bernoulli
2. Énoncer le théorème d'existence d'une solution du problème de Cauchy.
   Théorème 1.4.1 *(Théorème de Cauchy-Lipschitz) On suppose que f est une fonction continue et localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$. Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy (PC) admet une solution unique définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. Ici $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$*
3. Montrer que le problème possède une solution maximale unique.
   $f(t,x) = -x(t) + 5e^{-t}x(t)^5$ est définiede et de classe C^1 sur R^2 car $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -1 + 25e^{-t}x(t)^4$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ existent et elles sont continues sur R. d'après théorème de Cauchy-Lipschitz le problème admet une solution unique maximale et celle-ci est définie sur un intervalle ouvert $]a;b[$ contenant t_0.
4. Quelles sont les solutions stationnaires de l'EDO.
5. on pose $x = a$ cts alors $a' = -a + 5e^{-t}a^5 = 0 \Rightarrow a = 0$

6. Montrer que si une solution de (E) s'annule en un point, alors c'est la solution nulle.

Soit x une solution de (E) qui s'annule en un point t0. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) - 5e^{-t}x(t)^5 = 0 \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

Comme $(x, t) \longrightarrow -x(t) + 5e^{-t}x(t)^5$ est clairement continue et localement lipchitzienne par rapport à x, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème possède une unique solution maximale. Or la solution constante nulle sur R est solution, donc $x(t)$ est la solution constante nulle de ce problème.

7. En utilisant le changement de variable $z(t) = x(t)^{-4}$ déterminer la solution maximale de (E) avec $x(1) = 0$.

on pose $z(t) = x(t)^{-4} \Rightarrow z' = \frac{-4x'}{x^5}$ alors $x'(t) + x(t) - 5e^{-t}x(t)^5 = 0 \Rightarrow z' = 4z - 20e^{-t}$ alors $z = z_H + z_p = Ce^{4t} + 4e^{-t}$ donc $x(t) = (Ce^{4t} + 4e^{-t})^{\frac{-1}{4}}$

Exercice 3

On considère le système différentielle (S) suivante:

$$\begin{cases} x'(t) = (3t-1)x(t) + (t-1)y(t) \\ y'(t) = -(t+2)x(t) + (t-2)y(t) \end{cases}$$

1. Écrire le système (S) sous forme matricielle $X' = AX$
2. Montre que le polynôme caractéristique de A est: $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + (3-4t)\lambda + 4t^2 - 6t$.
3. Résoudre le système pour $t \in R - \{-2, 1\}$ et étudier la stabilité de l'origine pour $t = 2$.

$X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 3t-1 & (-1 \\ -(t+2) & t-2 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow$ $P^{-1}X' = DP^{-1}X \Leftrightarrow Y' = DY$ Tq $Y = P^{-1}X$ alors $Y' = P^{-1}X'$ avec $X = PY$

$det(A - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \lambda^2 + (3-4t)\lambda + 4t^2 - 6t, Sp(A) = \{2t, 2t-3\}$ Alors

$V_{2t-3} = \begin{pmatrix} \frac{1-t}{t+2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_{2t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $P = \begin{pmatrix} \frac{1-t}{t+2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2t-3 & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}$ $Y' = DY \Rightarrow$ $Y = \begin{pmatrix} c_1 e^{t^2-3t} \\ c_2 e^{t^2} \end{pmatrix}$ avec $c_1, c_2 \in R$ Mais $X = PY \Rightarrow X(t) = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1-t}{t+2} e^{t^2-3t} \\ e^{t^2-3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -e^{t^2} \\ e^{t^2} \end{pmatrix}$.

فلا تجزع وان أعسرت يوما   فقد أيسرت في الزمن الطويل