Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de MI **L3-Equations différentielles 2020/2021**

Contrôle final(03/03/2021)

Exercice 1

Soit

$$E : y^3 = y' - x^3 \qquad et \;\; y(0) > 0$$

.

1. Écrire l'équation E sous la forme normale.
2. Donner l'ordre de E et établir si elle est linéaire ou non-linéaire, et autonome ou non-autonome?.
3. Justifier l'existence d'une unique solution maximale y de E vérifiant $y(0) > 0$ et définie sur un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$
4. Montrer que y est croissante sur $]0, \beta[$
5. Etablir que β est réel.
6. Déterminer la limite de y en β^-

Exercice 2

Résoudre le système différentielle suivante:

$$\begin{cases} x'(t) = 2tx(t) - y(t) + e^{t^2} \\ y'(t) = -x(t) + 2ty(t) + e^t \end{cases}$$

Exercice 3

Résoudre sur R l'équations

1. $y' = ey$.
2. $y' + y = 2\sin(x)$.
3. $y'(x^2 - 2x - 3) = y$
4. $y'' - 4y' + 3y = x$.
5. $y' + 2y - (x+1)y^2 = 0$ en posant $z = y^{-1}$.
6. $y' = y \ln x$.

الرياضـــــــيات لغة تسحر العقول أكثر مما تقول

Université Dr. Yahia Farès de Médéa	
Faculté des Sciences	
Département de MI	**L3-Equations différentielles 2020/2021**

Coercition/Contrôle final(03/03/2021)

Exercice 1

Soit

$$E : y^3 = y' - x^3 \qquad et \;\; y(0) > 0$$

.

1. Écrire l'équation E sous la forme normale.

   La forme normale de E est

   $$E : y' = y^3 + x^3 \qquad et \;\; y(0) > 0$$

   .

2. Donner l'ordre de E et établir si elle est linéaire ou non-linéaire, et autonome ou non-autonome?.

   lL'ordre de E est 1 (car y') non-linéaire (car on a y^3) et non-autonome (car on a x^3)

3. Justifier l'existence d'une unique solution maximale y de E vérifiant $y(0) > 0$ et définie sur un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$

   $f(x, y) = y^3 + x^3$ est définie et de classe C^1 sur R^2 car $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2$ existent et elles sont continues sur R. d'après théorème de Cauchy-Lipschitz le problème admet une solution unique maximale et celle-ci est définie sur un intervalle ouvert $]\alpha; \beta[$ contenant 0.

4. Montrer que y est croissante sur $[0, \beta[$

   supposons qu'il existe $x \in [0; \beta[$ tq $y'(x) < 0$. donc $y'(0) = (y(0))^3 > 0$ et car y' est continue on pose $B = \{x \in [0; \beta[, y'(x) = 0\}$ et $a = \inf B$ alors $y'(a) = 0$ car a est l'inf de B et B une partie fermée et comme y' continue sur R: $\forall x \in [0, a] : y'(x) \geq 0$.donc y est croissante sur $[0, a]$ alors $y(a) \geq y(0) > 0$. Or $y'(a) = 0$ alors $(y(a))^3 = -a^3 < 0$. absurde. donc pour tt $x \in [0; \beta[: y'(x) \geq 0$. alors y est croissante sur $[0, \beta[$

5. Etablir que β est réel.

   Par absurde , supposons que $\beta = +\infty$ et on pose $x \geq 1$. alors $y'(x) \geq 1 + (y(x))^3$ donc $\int_1^x \frac{y'(t)}{1+(y(t))^3} dt \geq \int_1^x dt = x - 1$ or $\int_1^x \frac{y'(t)}{1+(y(t))^3} dt = \int_{y(1)}^{y(x)} \frac{dt}{1+t^3} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} < +\infty$ C'est absurde. alors $\beta \in R$

6. Déterminer la limite de y en β^-

   y est croissante et continue sur $[0, \beta[$ alors admet une limite l en β. supposons que $l \in R$. alors il ya un prolongement y_1 de y sur $[0, \beta]$ tq $y_1(\beta) = l$ et alors y_1 est une sol de E sur $[0, \beta]$, C'est absurde car y une sol maximale de E alors la limite de y en β^- est $+\infty$

Exercice 2

Résoudre le système différentielle suivante:

$$\begin{cases} x'(t) = 2tx(t) - y(t) + e^{t^2} \\ y'(t) = -x(t) + 2ty(t) + e^t \end{cases}$$

$X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ -1 & 2t \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

et $B(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ e^t \end{pmatrix}$

$X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Leftrightarrow Y' = DY$

Tq $Y = P^{-1}X$ alors $Y' = P^{-1}X'$ avec $X = PY$

$det(A - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow Sp(A) = \{2t+1, 2t-1\}$

Alors $V_{2t+1}(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_{2t-1}(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2t+1 & 0 \\ 0 & 2t-1 \end{pmatrix}$

$Y' = DY \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} c_1 e^{t^2+t} \\ c_2 e^{t^2-t} \end{pmatrix}$ avec $c_1, c_2 \in R$

Mais

$X(t) = py(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{t^2+t} \\ c_2 e^{t^2-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{t^2+t} + c_2 e^{t^2-t} \\ -c_1 e^{t^2+t} + c_2 e^{t^2-t} \end{pmatrix}$

$X = PY \Rightarrow X(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ -6e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ -e^{-4t} \end{pmatrix}.$

Exercice 3

1. $y' = ey$. alors $y(x) = Ce^{et}, c \in R$

2. $y' + y = 2\sin(x)$. l'équation homogène est $y' + y = 0$ dont la solution est $y_H(x) = Ce^{-x}$ On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ et on trouve $y_p(x) = -\cos(x) + \sin(x)$ alors $y(x) = Ce^{-x} - \cos(x) + \sin(x)$.

3. $y'(x^2 - 2x - 3) = y$ alors $y' = \frac{1}{x^2-2x-3}y = \frac{1}{(x-3)(x+1)}y = (\frac{1/4}{x-3} + \frac{-1/4}{x+1})y$ donc $y(x) = Ce^{(1/4\ln|x-3| - 1/4\ln|x+1|)t} = C|\frac{x-3}{x+1}|^{\frac{t}{4}}$.

4. $y'' - 4y' + 3y = x$. l'équation homogène $y'' - 4y' + 3y = 0$, Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$ dont les racines sont 1 et 3. Les solutions générales de l'équation homogène sont $y_H(x) = \lambda e^x + \mu e^{3x}$ on va chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax + b$ Par identification $y_p(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$ La solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par $y(x) = y_H(x) + y_P(x) = \lambda e^x + \mu e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$. λ *et* $\mu \in \mathbb{R}$

5. $y' + 2y - (x+1)y^2 = 0$ en posant $z = y^{-1}$.

   on pose $z = y^{-1}$ alors $-z' + 2z = x + 1$ donc l'équation homogène est $-z' + 2z = 0$ dont la solution générale est $z(x) = Ce^{2x}$, $C \in R$ On cherche une solution particulière sous la forme $z_p(x) = ax + b$, On introduit ceci dans l'équation différentielle et on trouve $z_p(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ alors la solution générale de l'équation avec second membre est $z(x) = Ce^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, $C \in \mathbb{R}$. Finalement, $y(x) = \frac{1}{Ce^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}}$. $C \in \mathbb{R}$.

6. $y' = y \ln x$. alors $y(x) = e^{x\ln(x)-x}$.

الرياضــــــــيات لغة تسحر العقول اكثر مما تقول
