UNIVERSITE DJILALI LIABES
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique
LMD : Licence S5 ISIL

Systèmes d'aide à la décision
EMD (Correction en gras)

Exercice 1 *Soit $X : (\Omega, \mathcal{O}, \mathbb{P}) \longrightarrow (E, \mathcal{E})$ une variable aléatoire.*

1. *Que représente chacun des symboles $\mathcal{O}$, $\mathcal{E}$ et $\mathbb{P}$?* 2 pts
   $\mathcal{O}$ est une σ-algèbre sur Ω,
   $\mathcal{E}$ est une σ-algèbre sur E
   $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{O}$.
2. *Quel est le lien entre $\mathcal{O}$ et $\mathcal{E}$?* 1 pt
   Comme X est une v.a. alors pour tout $B \in \mathcal{E}$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{O}$ où X^{-1} est l'inverse ensembliste de X.
3. *Que doit vérifier X pour qu'elle soit une variable aléatoire ?* 1 pt
   Pour que X soit une variable aléatoire, il faut que $X^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{O}$ où X^{-1} est l'inverse ensembliste de X.
4. *Si l'on construit une mesure de probabilité image $\mathbb{P}_X$ sur $\mathcal{E}$, que doit vérifier $\mathbb{P}_X$?* 1 pt
   $\mathbb{P}_X$ doit vérifier pour tout $B \in \mathcal{E}$, $\mathbb{P}_X(B) = P(X^{-1}(B))$.
5. *Montrer que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.* 1 pt
   Pour tout $B \in \mathcal{O}$, $B \bigcap \emptyset = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \bigcup \emptyset) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\emptyset)$ (additivité de la mesure de probabilité) ; donc $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Exercice 2 *Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F, pour $\lambda > 0$, vérifie :*

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [0,\ 1] \\ x & \longmapsto & 1 - e^{-\lambda x} \end{array}$$

1. *Donner la densité de X et montrer qu'elle est décroissante.* 2 pts
   La densité de X s'écrit $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x > 0$ et $f'(x) = -\lambda^2 e^{-\lambda x}$ qui est toujours négative, donc f est décroissante.
2. *Sachant que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ (moyenne de X) et $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ (variance de X), donner un estimateur qui converge presque sûrement vers λ de deux manières différentes. Justifier la réponse.* 3 pts
   Comme $X > 0$, $E(X) = E(|X|) = \dfrac{1}{\lambda} < \infty$, nous utilisons le théorème de Kolmogorov et l'on a pour toute suite i.i.d. $X_1, X_2, ..., X_n$ de même loi que X, $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ p.s. quand $n \to \infty$. Comme $\lambda > 0$, la fonction $\dfrac{1}{\lambda}$ est continue, en utilisant le corollaire du théorème de Kolmogorov, on a $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \longrightarrow \lambda$ p.s. quand $n \to \infty$.
   L'expression $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ est donc un estimateur qui converge p.s. vers λ.
   Comme la variance de X existe, on a
   $$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2} \longrightarrow \sqrt{Var(X)} = \frac{1}{\lambda} \text{ p.s. quand } n \to \infty.$$
   En utilisant encore le corollaire du théorème de Kolmogorov, on montre que

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}}$$ **est un autre estimateur qui converge p.s. vers λ.**

3. *En rappelant que pour simuler un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0,\ 1]$, on utilise la fonction* `runif` *dans le langage fonctionnel R. Donner une méthode pour simuler une réalisation d'une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X.* 3 pts

   Une une réalisation d'une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X est obtenue $F^{-1}(\texttt{runif}(n))$ où $F^{-1}(x) = \dfrac{-\log(1-x)}{\lambda}$.

Exercice 3 *Soit $X_1,\ X_2,\ ...,X_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. (indépendantes identiquement distribuées) de même loi que $X \sim \mathcal{N}(m,\ 2)$, $m \in \mathbb{R}$.*

1. *Donner un estimateur $\widehat{m}$ qui converge presque sûrement vers m en utilisant la méthode des moments.* 1 pt

   La variance de X existe donc $E(|X|) < \infty$. En utilisant le théorème de Kolmogorov, on a $\widehat{m} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow E(X) = m$ p.s. quand $n \to \infty$.

2. *Donner un intervalle de confiance quelconque de m pour un risque maximum de seuil $\alpha = 0,05$.* 1 pt

   Un intervalle de confiance quelconque de m pour un risque maximum de seuil $\alpha = 0,05$ peut être construit de différentes façons. Il suffit de construire un intervalle I tel que $\mathbb{P}(X \in I) = 0,95$.

   Exemple I tel que $\dfrac{\widehat{m}-m}{2/\sqrt{n}} \in$ [-1,64, ∞[veut dire que l'intervalle de confiance de m pour un risque maximum de seuil $\alpha = 0,05$ est, dans ce cas, $]-\infty,\ \widehat{m}+1,64\dfrac{2}{\sqrt{n}}]$.

   Exemple I tel que $\dfrac{\widehat{m}-m}{2/\sqrt{n}} \in$ [-∞, 1,64 [veut dire que l'intervalle de confiance de m pour un risque maximum de seuil $\alpha = 0,05$ est, dans ce cas, $]\widehat{m}-1,64\dfrac{2}{\sqrt{n}},\ \infty]$.

3. *Au vu de l'échantillon $x_1, \ldots, x_{10}$ valant*

   `5.5   5.1   2.8   4.3   6.1   6.3   3.1   4.8   2.2   5.0`

   et au risque de seuil $\alpha = 0,05$, construire un système décisionnel pour tester $H_0 : m \geq 5$ contre $H_1 : m < 5$. Commenter. 4 pts

   $\widehat{m} = 4.52$

   Le risque étant à gauche, l'intervalle de confiance pour m est égal à $[m_0 - 1,64\dfrac{2}{\sqrt{n}},\ \infty[\approx [5 - 1,64\dfrac{2}{3,16},\ \infty[\ \approx [3,96,\ \infty[$.

   Au risque maximum $\alpha = 0,05$, nous acceptons l'hypothèse H_0.

   C'est le test le plus puissant pour ce type de décision.

Indications :

$\sqrt{(10)} \approx 3.16$

La somme des x_i ; i=1, ...,10, vaut 45.2

La somme des carrés des x_i ; i=1, ...,10, vaut 221.98

Si l'on note F la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a :

y =	0	0.01	0.025	0.05	0.5	0.95	0.975	0.99	1
$F^{-1}(y) \approx$	-∞	-2.33	-1.96	-1.64	0	1.64	1.96	2.33	∞

C'est-à-dire :

qnorm(0)=-∞; qnorm(0,01)=-2,33; qnorm(0,025)=-1,96; ...; qnorm(0,975)=1,96; qnorm(0,99)=2,33; qnorm(1)=∞.

Exercice 4 Facultatif *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble non vide Ω. Montrer que $\mathcal{R}$ induit une partition sur Ω.* 4 pts

Si $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble non vide Ω, les classes d'équivalence sont des partie de Ω qui vérifient $\dot{x} = \{y \in \Omega, (x, y) \in \mathcal{R}\}$. On a $\forall x \in \Omega,\ x \in \dot{x}$, cela donne $\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \Omega} \{\dot{x}\}$. Or toutes les classes d'équivalence sont dans Ω, ce qui veut dire que $\bigcup_{x \in \Omega} \{\dot{x}\} \subset \Omega$; donc $\bigcup_{x \in \Omega} \{\dot{x}\} = \Omega$. Comme deux classes distinctes n'ont pas d'élément commun (sinon elles seraient identiques), les classes d'équivalence données par $\mathcal{R}$ induisent bien une partition sur Ω (qui veut dire aussi que $\mathcal{R}$ induit une partition sur Ω.).

Exercice 5 Facultatif : *On considère le jeu sous forme stratégique suivant :*

Joueur 1 \ *Joueur 2*	*G*	*C*	*D*
H	*(2,5)*	*(4,8)*	*(1,3)*
M	*(1,4)*	*(2,5)*	*(3,6)*
B	*(3,7)*	*(5,8)*	*(2,9)*

Trouver l'équilibre en stratégies strictement dominantes. En supprimant la stratégie B pour le joueur 1 et la stratégie C pour le joueur 2, trouver l'équilibre de Nash en stratégie mixte. 4 pts

- **C domine G donc le joueur 2 n'a absolument pas intérêt à jouer la colonne G. On peut donc l'éliminer et se ramener à**

Joueur 1 \ **Joueur 2**	**C**	**D**
H	**(4,8)**	**(1,3)**
M	**(2,5)**	**(3,6)**
B	**(5,8)**	**(2,9)**

La ligne B domine H. On obtient donc :

Joueur 1 \ **Joueur 2**	**C**	**D**
M	**(2,5)**	**(3,6)**
B	**(5,8)**	**(2,9)**

D domine C, donc

Joueur 1 \ **Joueur 2**	**D**
M	**(3,6)**
B	**(2,9)**

L'équilibre final est donc :

Joueur 1 \ **Joueur 2**	**D**
M	**(3,6)**

- **En supprimant la stratégie B pour le joueur 1, et la stratégie C pour le joueur 2, trouver l'équilibre de Nash en stratégie Mixte.**

Joueur 1 \ **Joueur 2**	**G**	**D**
H	**(2,5)**	**(1,3)**
M	**(1,4)**	**(3,6)**

Le joueur 1 joue la stratégie H avec la probabilité q et la stratégie M avec la probabilité $1 - q$. Le joueur 2 joue la stratégie G avec la probabilité p et la stratégie D avec la probabilité $1 - p$.

1. **Si le joueur 2 choisira G, son espérance de gain sera : $5 * q + 4 * (1 - q)$.**

2. Si le joueur 2 choisira D, son espérance de gain sera : $3 * q + 6 * (1 - q)$.

Pour qu'il existe un équilibre de Nash, il faut que :

$$5 * q + 4 * (1 - q) = 3 * q + 6 * (1 - q)$$

Par conséquent $q = \frac{1}{2}$.

1. Si le joueur 1 choisira H, son espérance de gain sera : $2 * p + 1 * (1 - p)$.
2. Si le joueur 2 choisira M, son espérance de gain sera : $1 * p + 3 * (1 - p)$.

Pour qu'il existe un équilibre de Nash, il faut que :

$$2 * p + 1 * (1 - p) = 1 * p + 3 * (1 - p)$$

Par conséquent $p = \frac{2}{3}$.
L'équilibre de Nash du jeu existe si le joueur 1 a une stratégie mixte $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ et le joueur 2 a une stratégie mixte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

+1 pour la présentation.

B O N N E   C O N T I N U A T I O N