

Blida, le 30 Juin 2010

Epreuve de Rattrapage
Module : Programmation linéaire

Exercice 1.

Une verrerie produit des verres à café, des verres à thé et des verres à eau.

Les prix de vente, les quantités requises de verre ainsi que les temps de façonnage et d'emballage sont différents pour chacun des produits et sont donnés dans le tableau suivant :

	Verres à café	Verres à thé	Verres à eau
Temps de façonnage (min)	4	2	12
Temps d'emballage (min)	2	1	4
Quantité de verre (kg)	0.1	0.15	0.1
Prix de vente (DA)	8	6	15

Pour la semaine à venir, l'entreprise dispose de 3000 minutes pour le façonnage, de 1200 minutes pour l'emballage et de 100 kilogrammes de verre.

- Formuler un programme linéaire aidant l'entreprise à déterminer une production maximisant son chiffre d'affaires.
- Donner le programme dual du problème.
- Résoudre le problème primal.
- Donner la solution optimale du programme dual.
- Si l'entreprise pouvait améliorer le façonnage ou l'emballage de ces produits, ce qui reviendrait à disposer de plus de temps pour l'une ou l'autre de ces deux activités, quelle étape de la production lui conseillerez-vous de modifier en premier ?

Exercice 2. Soit le problème linéaire P suivant :

$$\begin{aligned} \max. Z &= C \cdot X \\ \text{(P)} \quad A \cdot X &= b \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

a) Montrer que la fonction objective du problème (P) définie sur le polyèdre

$$\mathbb{K} = \{ X, X \geq 0 / A \cdot X = b \}$$
 atteint son maximum en un point extrême de \mathbb{K} .

b) Si la fonction objective prend sa valeur maximale au plus d'un point extrême alors toutes combinaisons linéaire convexe de ces points donne la même valeur à la fonction objective.

c) Un point \bar{x} de \mathbb{K} est un point extrême si et seulement si \bar{x} est une solution de base réalisable du problème $A \cdot X = b$.

d) En déduire si $\mathbb{K} \neq \emptyset$ alors il admet au moins un point extrême.

Exercice 3.

En appliquant la méthode du grand M, montrer que le problème linéaire suivant n'a pas de solutions.

$$\begin{aligned} \text{Min} Z &= -2 x_1 - 3 x_2 + x_3 \\ -4 x_1 - 5 x_2 - 2 x_3 &\geq 5 \\ -x_1 + 6 x_2 + x_3 &\geq 10 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Correction des exercices proposés le 30 Juin 2010

Dans la cadre de l'épreuve de Rattrapage du Module de la Programmation linéaire

De la 3 ième Année Licence LMD

Par Dr. DERBALA Ali.

Solution 1.

a. Définissons les variables de décision par :

X_1 : le nombre de verres à café produits pendant la semaine à venir ;

X_2 : le nombre de verres à thé produits pendant la semaine à venir ;

X_3 : le nombre de verres à eau produits pendant la semaine à venir ;

Le plan de production maximisant le chiffre d'affaires est solution du programme linéaire :

$$\text{Max } z = 8 X_1 + 6 X_2 + 15 X_3$$

$$4 X_1 + 2 X_2 + 12 X_3 \leq 3000$$

$$2 X_1 + X_2 + 4 X_3 \leq 1200$$

$$0,1 X_1 + 0,15 X_2 + 0,1 X_3 \leq 100$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \text{ et } X_3 \geq 0$$

b. Le problème dual du programme précédent est :

$$\text{Min } w = 3000 y_1 + 1200 y_2 + 100 y_3$$

$$4 y_1 + 2 y_2 + 0,1 y_3 \geq 8$$

$$2 y_1 + y_2 + 0,15 y_3 \geq 6$$

$$12 y_1 + 4 y_2 + 0,1 y_3 \geq 15$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \text{ et } y_3 \geq 0$$

c. Le but est d'obtenir une base optimale formée de (X_1, X_2, X_3). En dressant les tableaux du simplexe on obtiendra : si on choisit de faire entrer X_1 , il est optimal de faire sortir X_5 .

V.B	1	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Coût
X_4	3000	4	2	12	1	0	0	750
X_5	1200	2	1	4	0	1	0	600
X_6	100	1/10	3/20	1/10	0	0	1	1000
Z	0	-8	-6	-15	0	0	0	

Si on fait rentrer X_1 dans la base, si X_4 sortira, ça nous coûtera 750, de même pour X_5 , elle nous coûtera 600 et X_6 nous coûtera 1000. A moindre coût, Il est optimal de faire sortir X_5 .

V.B	1	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Coût
X_4	600	0	0	4	1	-2	0	∞
X_1	600	1	1/2	2	0	1/2	0	1200
X_6	40	0	1/10	- 1/10	0	-1/20	1	400
Z	4800	0	-2	1	0	4	0	

Si on fait rentrer X_2 dans la base, il est optimal de faire sortir X_6 .

V.B	1	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Coût
X_4	600	0	0	4	1	-2	0	150
X_1	400	1	0	5/2	0	3/4	-5	160
X_2	400	0	1	- 1	0	-1/2	10	-
Z	5600	0	0	-1	0	3	20	

Si on fait rentrer X_3 dans la base, il est optimal de faire sortir X_4 .

V.B	1	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Coût
X_3	150	0	0	1	1/4	-1/2	0	-
X_1	25	1	0	0	-5/8	2	-5	-
X_2	550	0	1	0	1/4	-1	10	-
Z	5750	0	0	0	1/4	5/2	20	

Ce tableau final est optimal.

La solution est : $X_1^* = 25$ verres à café, $X_2^* = 550$ verres à thé et $X_3^* = 150$ verres à eau pour un chiffre d'affaires de $Z^* = 5750$ DA.

d. La solution optimale duale se lit du tableau optimal :

$y_1^* = 1/4$, $y_2^* = 5/2$ et $y_3^* = 20$, $w^* = 5750$ DA.

e. Le coût marginal associé à la première ressource (le temps de façonnage) est $y_1^* = 1/4$ et celui associé à la deuxième ressource (le temps d'emballage) est $y_2^* = 5/2$. Il est donc préférable d'essayer d'augmenter en premier lieu le temps d'emballage car, pour une augmentation égale, l'impact sur le chiffre d'affaire sera plus important.

Solution 2 . voir cours donnés par Dr. DERBALA Ali à

http://www.univ-blida.dz/fac_sciences/mathematique/ali_derbala.html

$$\text{a. soit un PL sous forme standard } (P) \begin{cases} \max Z = cx & (1) \\ Ax = d & (2) \\ x \geq 0 & (3) \end{cases}$$

Soient $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p$ les points extrêmes de IK et x_0 une solution optimale de (1)-(3).

Supposons le contraire, que x_0 n'est pas un point extrême de IK.

Alors $x_0 = \sum_{i=1}^p \lambda_i \bar{x}_i$ et où

$$Z(x_0) = Z\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \bar{x}_i\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i Z(\bar{x}_i) \quad (4)$$

Déterminons la valeur maximale que prend la fonction objectif Z aux points extrêmes,

$$\max_{i \in \{1, \dots, p\}} Z(\bar{x}_i) = Z(\bar{x}_r).$$

Remplaçons dans (4) chaque $Z(\bar{x}_i)$ par $Z(\bar{x}_r)$.

$$\text{D'où } Z(x_0) = Z\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \bar{x}_i\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i Z(\bar{x}_i) \leq Z(\bar{x}_r) \sum_{i=1}^p \lambda_i \leq Z(\bar{x}_r)$$

Où $Z(\bar{x}_r) \geq Z(x_0)$. Ce qui implique que x_0 n'est pas une solution optimale.

D'où x_0 est un sommet de IK.

b. Soient $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p$ les points extrêmes de IK et $Z(\bar{x}_1) = \dots = Z(\bar{x}_p) = \alpha$, la valeur minimale

(resp. maximale). Soit $\bar{x} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \bar{x}_i$ et où $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, avec $\lambda_i \geq 0$

$$Z(\bar{x}) = Z\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \bar{x}_i\right) = \alpha \sum_{i=1}^p \lambda_i = \alpha = Z(\bar{x}_i)$$

c. \Leftarrow Soit $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, 0, 0, \dots, 0)$ une solution de base réalisable. Montrons que

\bar{x} est un point extrême. Raisonnons par absurde.

Supposons qu'il existent \bar{y} et \bar{z} deux sommets de IK tel que :

$$\bar{x} = \alpha \bar{y} + (1 - \alpha) \bar{z}; 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Du fait que $\bar{x} \geq 0$ et $0 \leq \alpha \leq 1$, les "n - m" dernières composantes de \bar{y} et \bar{z} sont nulles.

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m, 0, \dots, 0); \text{ et } \bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m, 0, \dots, 0)$$

Du fait que \bar{y} et \bar{z} sont des solutions réalisables alors

$$y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_m a_m = b, \text{ et } z_1 a_1 + z_2 a_2 + \dots + z_m a_m = b$$

$$\text{D'où } (y_1 - z_1) a_1 + (y_2 - z_2) a_2 + \dots + (y_m - z_m) a_m = 0$$

$(a_i)_{i=1, \dots, m}$ sont L.I forment une base.

$$\text{Il en découlera } y_1 - z_1 = y_2 - z_2 = \dots = y_m - z_m = 0$$

$$y_1 = z_1; y_2 = z_2; \dots; y_m = z_m. \text{ et donc } \bar{x} = \bar{y} = \bar{z}.$$

\Rightarrow soit \bar{x} est un point extrême, montrons qu'il est une solution de base réalisable de IK. $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ est une solution de IK.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m x_i a_i = b. \text{ Si } a_1, a_2, \dots, a_m \text{ sont L.I alors } \bar{x} \text{ est de base.}$$

Si a_1, a_2, \dots, a_m sont linéairements dépendants, alors ils existent des scalaires y_i non tous nuls

$$\text{tel que } \sum_{i=1}^m y_i a_i = 0 \quad (1). \text{ Mais } \sum_{i=1}^m x_i a_i = b \quad (2)$$

$$\text{Pour } \varepsilon > 0, \sum_{i=1}^m x_i a_i + \varepsilon \sum_{i=1}^m y_i a_i = b \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m x_i a_i - \varepsilon \sum_{i=1}^m y_i a_i = b$$

Nous avons trouvé deux solutions (pas nécessairement réalisables)

$$\bar{y} = (x_1 + \varepsilon y_1, \dots, x_m + \varepsilon y_m, 0, \dots, 0) \text{ et } \bar{z} = (x_1 - \varepsilon y_1, \dots, x_m - \varepsilon y_m, 0, \dots, 0)$$

Comme $x_i > 0$, on peut choisir ε tel que \bar{y} et \bar{z} soient des solutions réalisables.

Mais $\bar{x} = 1/2 \bar{y} + 1/2 \bar{z}$. Absurde car \bar{x} ne sera pas un sommet.

d. si le polyèdre de réalisabilité IK est non vide, alors il contient au moins une solution réalisable à partir de laquelle on peut construire une solution de base réalisable et donc il contient au moins un point extrême.

Solution 3 .

$$\text{MinZ} = -2 x_1 - 3 x_2 + x_3$$

$$- 4 x_1 - 5 x_2 - 2 x_3 \geq 5$$

$$- x_1 + 6 x_2 + x_3 \geq 10$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$$

$$\text{MinZ} = -2 x_1 - 3 x_2 + x_3$$

$$- 4 x_1 - 5 x_2 - 2 x_3 - x_4 = 5$$

$$- x_1 + 6 x_2 + x_3 - x_5 = 10$$

$$x_i \geq 0 ; i = 1, \dots, 5.$$

$$\text{MinZ} = -2 x_1 - 3 x_2 + x_3$$

$$4 x_1 + 5 x_2 + 2 x_3 + x_4 = - 5$$

$$x_1 - 6 x_2 - x_3 + x_5 = -10$$

$$x_i \geq 0 ; i = 1, \dots, 5.$$

$J_1 = \{3\}$ et $J_2 = \{1, 2\}$. On rajoute l'équation artificielle : $x_1 + x_2 + x_6 = M$. où M est un nombre positif aussi grand que l'on veut. Calculons $\min \{ c_j, j \in J_2 \} = \{ -2, -3 \} = c_2$

Le problème augmenté devient : $\text{MinZ} = -2 x_1 - 3 (M - x_1 - x_6) + x_3$

$$4 x_1 + 5 (M - x_1 - x_6) + 2 x_3 + x_4 = - 5$$

$$x_1 - 6 (M - x_1 - x_6) - x_3 + x_5 = -10$$

$$x_1 + x_2 + x_6 = M.$$

$$x_i \geq 0 ; i = 1, \dots, 5.$$

$$\text{MinZ} = x_1 + x_3 + 3 x_6 - 3M$$

$$- x_1 + 2 x_3 + x_4 - 5 x_6 = - 5M-5$$

$$7 x_1 - x_3 + x_5 + 6 x_6 = 6M-10$$

$$x_1 + x_2 + x_6 = M.$$

$$x_i \geq 0 ; i = 1, \dots, 5.$$

C_B	x_B	d_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	$-5M-5$	-1	0	2	1	0	-5
0	x_5	$6M-10$	7	0	-1	0	1	6
0	x_2	M	1	1	0	0	0	1
$Z_j - c_j$		$- 3M$	-1	0	-1	0	0	-3

$X_4 = -5M - 5 < 0$, a_4 sort de la base.

Calculons $\min \{Z_j - c_j / a_{4j} < 0\} = \{-1/-1, -3/-5\} = 3/5$; a_6 rentre dans la base.

C_B	x_B	d_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3	x_6	$M+1$	1/5	0	-2/5	-1/5	0	1
0	x_5	-16	29/5	0	7/5	6/5	1	0
0	x_2	-1	4/5	1	2/5	1/5	0	0
$Z_j - c_j$		3	-2/5	0	-11/5	-3/5	0	0

$X_5 = -16 < 0$, a_5 sort de la base. Tous les $a_{5j} \geq 0$, $j = 1, 3, 4$.

Le problème augmenté n'a pas de solutions optimales finies.

D'où le problème initial n'a pas de solutions finies.