Mars 2021

Université de Jijel
Faculté des sciences exactes & informatique
Département Informatique
3ème Année Licence

Examen en programmation linéaire

Exercice1 (5 pts)

a) Soit le système d'équations linéaires, suivant: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$

Déterminer toutes les solutions de base et préciser pour chaque solution si elle est réalisable ou non ?

b) Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} A_B x_B + A_H x_H = b \\ x_B,\ x_H \geq 0 \end{cases}$$

Soient $b, x_B \in R^3$, $x_H \in R^1$ et A_B une matrice inversible qui vérifie la relation

$LA_B = U$ où $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = (1,0,1)^T$

Trouver la solution de base réalisable associée à la base A_B.

Exercice2 (5 pts)

Soit le programme linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} Max\ Z = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Résoudre *(P)* par la méthode de deux phases.

b) Donner le dual *(D)* de *(P)*

c) Confirmer le résultat obtenu en (a).

Exercice3 (5 pts)

Une entreprise reconnue par ses beignes glacés; prépare aussi des beignes saupoudrés de sucre en poudre. Les beignes glacés lui rapportent un profit de 0,07 um l'unité et les beignes saupoudrés un profit de 0,05 um l'unité. Trois opérations principales sont nécessaires dans la préparation de ces beignes: la cuisson, le saupoudrage (beignes saupoudrés de sucre en poudre seulement) et le glaçage (beignes glacés seulement).

La production de l'entreprise est limitée quotidiennement comme suit:

Cuisson:	au plus 1400 beignes,
Saupoudrage:	au plus 1200 beignes,
Glaçage:	au plus 1000 beignes.

Le responsable de la production exige que la production de beignes glacés doive être d'au moins 600 quotidiennement. Construire un modèle où l'on cherche à maximiser le profit de l'entreprise.

Exercice4 (5 pts)

Une matière première se trouve stockée dans trois dépôts D_1, D_2 et D_3 où les quantités (en tonnes) disponibles sont respectivement 50, 70 et 40.

.On souhaite approvisionner à moindre coût deux points de vente P_1 et P_2 où les quantités (en tonnes) demandées son respectivement 60 et 80.

On suppose que les coûts de stockage sont nuls et les coûts unitaires de transports (par tonne) sont donnés dans le tableau ci-après :

	P_1	P_2
D_1	267	202
D_2	106	148
D_3	45	110

Déterminer l'approvisionnement optimal.

NB ; La note de l'Exercice1 et celle de l'Exezrcice2 seront comptabilisées dans la note de TD.

Module : Programmation linéaire (3)

Corrigé type

Exo1

ⓐ La base est de dimension = 2 (2,5)

- $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow$ pas de solutions

- $x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_4 = 3 \\ -x_2 + 2x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{5}{4}$ (0,5)

donc $(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{5}{4})$ est une solution de base réalisable

- $x_1 = x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ -x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{5}{2}$ (0,5)

(2,5) donc $(0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0)$ est une solution de base réalisable

- $x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 3 \\ 2x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1, x_4 = 1$ (0,5)

donc $(1, 0, 0, 1)$ est une solution de base réalisable

- $x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1, x_3 = 2$ (0,5)

donc $(1, 0, 2, 0)$ est une solution de base réalisable.

- $x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -2$ (0,5)

donc $(5, -2, 0, 0)$ est une solution de base non réalisable

Exo2

ⓐ

En

ⓒ $y_1 - y_2 \geq 3$ $y_1 - y_2 \geq 3$

Exo4

(b) $x_B = (A_B)^{-1} b \Rightarrow A_B x_B = b$

En multipliant par L on aura $L A_B x_B = L b$

Or $L A_B = U$ donc $U x_B = L b$

(2,5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -2 \\ x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 4 \end{array}$

donc la solution de base réalisable associée à A_B est $x_B = (3, 2, 4)^T$

Exo3

(a) La forme standard est :

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + e_1 = 10 \\ -x_1 + x_2 - e_2 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

En ajoutant les variables artificielles on aura :

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + e_1 = 10 \\ -x_1 + x_2 - e_2 + y_1 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Exo4 ... Nous remarquons que le

1ère phase

$\text{Min } w = 3 + x_1 - x_2 + e_2 \Rightarrow \text{Min } w - 3 = x_1 - x_2 + e_2$

		1	-1	0	0	1	0		
		x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	y_1	b	Rp
0	e_1	1	-1	2	1	0	0	10	-
0	y_1	-1	1	0	0	-1	1	3	3
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	
Δ_j		1	-1	0	0	1	0		

(1)

		1	-1	0	0	1	0	
		x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	y_1	b
0	e_1	0	0	2	1	-1	1	13
-1	x_2	-1	1	0	0	-1	1	3
Z_j		1	-1	0	0	1	-1	-3
Δ_j		0	0	0	0	0	1	

(1) $\Delta_j \geq 0 \ \forall j$ donc l'optimum est atteint. Comme $w = 3-3 = 0$ donc on passe à la 2ème phase

2ème phase

		3	-1	2	0	0		
		x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	b	Rp
0	e_1	0	0	2	1	-1	13	—
-1	x_2	-1	1	0	0	-1	3	—
Z_j		1	-1	0	0	1	-3	
Δ_j		2	0	2	0	-1		

(1)

Nous remarquons que le problème est non borné.

(B)

$$(D) \begin{cases} \text{Min } w = 10y_1 + 3y_2 \\ y_1 - y_2 \geq 3 \\ -y_1 + y_2 \geq -1 \\ 2y_1 \geq 2 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0 \end{cases}$$

(1)

(c) $y_1 - y_2 \geq 3$ $\quad\Rightarrow\quad$ $y_1 - y_2 \geq 3$ impossible

$-y_1 + y_2 \geq -1$ $\quad\quad\quad$ $y_1 - y_2 \leq 1$

(1) donc (D) n'a pas de solutions réalisables

Comme (P) admet des solutions réalisables d'après le théorème fondamental de dualité (P) est non borné.

Exo 3

x_1 : nombre de beignets glacés

x_2 : " " saupoudrés de sucre en poudre

$$\left\{\begin{array}{ll} \max Z = 0{,}07\,x_1 + 0{,}05\,x_2 & (1) \\ x_1 + x_2 \leq 1400 & (1) \\ x_1 \leq 1000 & (1) \\ x_2 \leq 1200 & (1) \\ x_1 \geq 600 & (1) \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}\right.$$

$$-x_1 + x_2 - e_2 + y_1 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, y_1 \geq 0$$

Exo 4

	P_1	P_2	
D_1	267	202	50
D_2	106	148	70
D_3	45	110	40
	60	80	

Nous remarquons que le problème est non balancé donc on ajoute un point de vente fictif de quantité $= 160 - 140 = 2$

On aura

	P_1	P_2	P_f	
D_1	267	202	0	50
D_2	106	148	0	70
D_3	45	110	0	40
	60	80	20	

La solution réalisable selon CNO

(1)

50			50
10	60		70
	20	20	40
60	80	20	

coût = 25490

Recherche d'une solution optimale

	267	309	199	
0	$50-\theta$ (267)	(202) 107	θ (0) 199	50
-161	$10+\theta$ (106)	$60-\theta$ (148)	(0) 38	70
-199	(45) 23	$20+\theta$ (110)	$20-\theta$ (0)	40
	60	80	20	

$\theta = 20$

(1)

30		20	50
30	40		70
	40		40
60	80	20	

Coût = 21510

	267	309	0	
0	$30-\theta$ (267)	θ (202) 107	20 (0)	50
-161	$30+\theta$ (106)	$40-\theta$ (148)	(0) -161	70
-199	(45) 23	40 (110)	(0) -199	40
	60	80	20	

$\theta = 30$

(1)

	30	20	50
60	10		70
	40		40
60	80	20	

coût = 18300

	160	202	0	
0	(267) -7	30 (202)	20 (0)	50
-54	60 − θ (106)	10 + θ (148)	(0) -54	70
-92	θ (45) 23	40 − θ (110)	(0) -92	40
	60	80	20	

$\theta = 40$

(1)

	30	20	50
20	50		70
40			40
60	80	20	

coût = 17380

	160	202	0	
0	(267) -7	30 (202)	20 (0)	50
-54	20 (106)	50 (148)	(0) -54	70
-115	40 (45)	(110) -23	(0) -115	40
	60	80	20	

$u_i + v_j - c_{ij} \le 0 \ \forall i,j$ donc la solution (1) optimale est atteinte et on a :

$x^*_{12} = 30$, $x^*_{13} = 20$

$x^*_{21} = 20$, $x^*_{22} = 50$

$x^*_{31} = 40$

avec un coût de

$30 \times 202 + 20 \times 106 + 50 \times 148 + 40 \times 45$

$= 17380$

Nous remarquons que 20 tonnes restent en stock de D_2