Sections : Isil et Lic Acad(Dept Informatique FEI).

Examen de Rattrapage d'Analyse Numérique **le 31/01/2015**

Exercice 1. Soit F une fonction de classe C^1 sur $I = [a,b]$ et $\bar{x} \in I$, $\bar{x}$ solution de l'équation $F(x) = 0$.

On suppose que $F(a)F(b) < 0 \quad et \quad F'(x) > 0 \; \forall x \in I$

Soit $x_0 \in I$ et soit la suite $x_1, x_2, x_3, \ldots$ construite de la manière suivante :

x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de (Ox) avec la droite de pente $\frac{1}{\delta}$ $(\delta \neq 0)$ passant par le point ($x_n, F(x_n)$) .

1/ Donner l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n .

2/ Montrer que si $0 < \delta . F'(x) < 1$ alors , $\forall x_0 \in I$,la suite (x_n) converge vers $\bar{x}$.

Exercice2

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & \beta \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, et \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in R$.

1) Pour quelles valeurs de α et β la matrice A est –elle décomposable sous la forme LU ?.
2) Pour $\alpha = \beta = 1$, résoudre le système $Ax = B$ par la méthode LU.
3) En déduire la solution du système, $A^2 x = B$ (sans calculer A^2) .

Exercice 3

On considère le système $Ax = B$, où $A = \begin{pmatrix} 3 & -\beta & 0 \\ -\beta & 4 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 5 \end{pmatrix}, et \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in R$.

1) Discuter selon les valeurs de α et β la convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel associées au système $Ax = B$.
2) Représenter géométriquement le domaine de convergence de la méthode de Jacobi donné par la norme $\|\cdot\|_1$.
3) On prend $\alpha = \beta = 1$, Calculer le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une solution approchée du système à 10^{-2} par la méthode itérative la plus rapide .