Examen de Logique (2017/2018)
L2 Informatique Générale : A- B- C **& L2 ISIL** : A

Exercice N°1 :

On définit des fonctions récursives sur les formules de L(¬,∧) de la logique des propositions comme suit :

- NbSymb : calcule le nombre de connecteurs dans une formule :

NbSymb (α)	=	0 si αest une Formule Atomique
NbSymb (¬α)	=	1 + NbSymb (α)
NbSymb (α^β)	=	1 + NbSymb (α)+NbSymb (β)

- NbAtom : calcule le nombre de sous-formules atomiques dans une formule :

NbAtom (α)	=	1 si αest une Formule Atomique
NbAtom (¬α)	=	NbAtom (α)
NbAtom (α^β)	=	NbAtom (α)+NbAtom (β)

1) Soit δ la formule suivante : $\delta = (A \wedge B) \wedge (A \wedge C)$ où A, B et C sont des variables propositionnelles.

Calculer, en donnant tous les détails, le résultat de : NbSymb (δ) et NbAtom (δ)

2) Prouver par récurrence que, pour toute formule α qui ne contient pas de symbole de négation « ¬ », on a : NbAtom (α) = NbSymb(α) + 1

3) Définir, de la même façon, les fonctions récursives « NbNeg » et « NbConj » qui comptent respectivement dans une formule de L(¬,∧), le nombre de symbole de négation « ¬ » et le nombre de symbole de conjonction « ∧ ».

4) Soit une formule α de L(¬, ∧) ne contenant pas de symbole logique NON «¬» :

$$\alpha = (A \wedge C \wedge B) \wedge (A \wedge C) \wedge (C \wedge B).$$

4.1/Appliquer l'algorithme de réfutation sur {α} pour en étudier par la suite l'inconsistance ou la satisfiabilité.
4.2/ Donner la FND de α.

5) On vous demande de généraliser le résultat de la question 4 à une formule quelconque de L(¬, ∧) qui ne contient pas de connecteur logique NON «¬» et formée avec les variables propositionnelles $A_1, \dots A_n$. On veut lui appliquer l'algorithme de réfutation pour en étudier l'inconsistance ou la satisfiabilité.
5.1/ Quel résultat va-t-on obtenir ? (Justifier vos résultats)
5.2/ En déduire la FND d'une formule quelconque (Justifier vos résultats).

Exercice2 :

I/ Soit les règles d'introduction et d'élimination du connecteur 'v' (ou) suivantes :

$$\frac{\alpha\vee\beta \quad \neg\alpha}{\beta}(E\vee) \qquad \frac{\alpha\vee\beta \quad \neg\beta}{\alpha}(E\vee) \qquad \frac{\alpha}{\alpha\vee\beta}(I\vee) \qquad \frac{\beta}{\alpha\vee\beta}(I\vee)$$

Montrer dans **Lp (¬,∨) :**

1/ $\vdash \alpha\to\beta\to\alpha\to\alpha$

2/ $\alpha \vdash \delta$ et $\beta \vdash \delta \Rightarrow \alpha\vee\beta \vdash \delta$

3/ $\neg\alpha\vee\neg(\beta\wedge\neg\delta), \neg\alpha\vee\beta \vdash \neg(\alpha\wedge\neg\delta)$

II/ En plus des règles précédentes, on introduit les règles d'introduction et d'élimination du quantificateur ∀. Montrer dans **Lp' (∀,¬, ∨),** les déductions suivantes :

1/ $\exists x\, (P(x)\wedge Q(x)) \vdash (\exists x\, P(x)) \wedge (\exists\, Q(x))$

2/ $(\forall y\, P(x,y)) \wedge \forall x\, R(x,z), P(x,a) \to \neg R(a,z) \vdash \exists x\, \neg P(x,a)$

Sachant que : $\alpha\wedge\beta = \neg(\neg\alpha\vee\neg\beta)$ et $\alpha\to\beta = \neg\alpha\vee\beta$

Examen de Logique (2017/2018)

L2 Informatique Générale : A- B- C **& L2 ISIL** : A

Exercice N°3 :

On souhaite modéliser le graphe orienté de la figure ci-dessous en utilisant la logique des prédicats avec égalité. Pour cela, on considère le langage du premier ordre L comprenant 3 symboles de constante a, b et c, deux symboles de prédicat binaires R et S, deux symboles de prédicats monaires A et N et un symbole de fonction f. Soit l'interprétation I définie par :

- Le domaine D ∪ 𝒩 tels que :

D = {ⓐ,ⓑ,ⓒ,①,②,③,④} représentant les sommets alphabétiques et numériques du graphe ;

𝒩 est l'ensemble des entiers naturels.

- I(a)=ⓐ, I(b)=ⓑ, I(c) = ③;
- I(R)= {(ⓐ,④) ,(ⓐ,ⓐ), (ⓑ,ⓑ), (ⓑ,ⓒ), (ⓒ,②), (ⓒ, ③), (①,①), (①,ⓐ), (②,③), (③,①), (③,ⓐ), (④,③), (④,ⓑ), (④,ⓐ)} tel que :

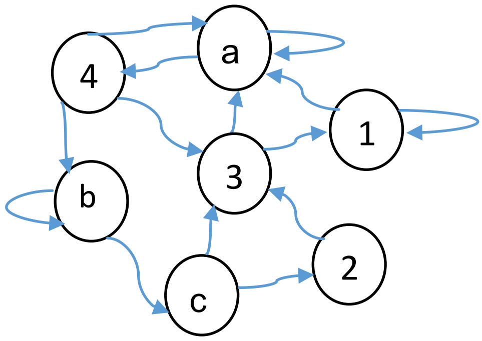
$R(s_1, s_2)$: le sommet s_1 est relié au sommet s_2 par une flèche.

- Le prédicat S(x, y) qui exprime que x est supérieur à y ;
- I(N)= {①,②,③,④} tel que : N(s) : s est un sommet numérique.
- I(A)= {ⓐ, ⓑ, ⓒ} tel que : A(s) : s est un sommet alphabétique.
- I(f) qui associe la longueur minimale du chemin entre deux sommets tel que :

$I(f)(s_1,s_2)$= le nombre minimum d'arcs qui relie s_1 à s_2 ;

Remarque : $I(f)(s_1,s_2)$= 0 s'il n'y a pas de chemin entre s_1 et s_2

Exemples : I(f)(①,②)= 5 ; I(f)(③,ⓐ)= 1 ; I(f)(ⓐ,ⓒ)= 3 ……



1/ Dans le langage L pour l'interprétation I définie précédemment, formaliser les phrases suivantes :

« Tous les sommets numériques sont reliés à au moins un sommet alphabétique ».

« Si deux sommets sont reliés entre eux alors l'un est numérique et l'autre est alphabétique ».

« La longueur minimale entre le sommet ⓐ et ⓑ est égale à 2 ».

2/ Etudier la validité ou la satisfiabilité des formules suivantes pour l'interprétation I :

- $\alpha_1 : \exists x\, \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$
- $\alpha_2 : (R(x,x) \wedge A(x)) \rightarrow (\exists y(A(y) \wedge R(x, y) \wedge \neg(x=y)))$
- $\alpha_3 : \exists x\, \exists y\, (A(x) \wedge N(y) \wedge S(f(c,x), f(c,y)))$

3/En justifiant votre réponse, compléter l'interprétation I (solution optimale) pour définir un modèle de l'ensemble $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

BON COURAGE