USTHB
Faculté D'électronique et d'Informatique
Cal.num. 2eme Lic.acad (Aet C) Isil (A,B)

Le 08/01/2012

Epreuve de Moyenne Durée

Exercice 1:

On s'intéresse à la résolution sur IR de l'équation $f(x)=0$ *où* $f(x)=x^3+x-1$.

1/ Montrer que l'équation précédente possède une unique solution $\bar{x}\in I=\left[\frac{1}{2},1\right]$.

2/ Montrer que $f(x)=0 \Leftrightarrow \varphi(x)=x$ où $\varphi(x)=1-x^3$. Etudier la stabilité et la contraction de $\varphi(x)$ sur $I=\left[\frac{1}{2},1\right]$.

3/ Etudier la nature de la suite définie par $\begin{cases} x_0\in I \\ x_{n+1}=1-x_n^{\ 3}\end{cases}$.

4/ La méthode de Newton est elle applicable à f sur I.

5/Calculer les trois premiers termes de la suite $(Y_n)_{n\in N}$ de Newton (en prenant $Y_0=1$) .Que pensez vous de la qualité de l'approximation de $\bar{x}$ ainsi obtenue.

Exercice2 : Soit la matrice définie A $=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{a}{2} & \frac{a}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{a}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

1) Triangulariser la matrice A par la méthode de Gauss sans échange de lignes ni de colonnes et indiquer pour quelles valeurs de a ceci est possible.

On prend pour la suite a=2

2) En déduire la décomposition LDV de A où L (resp. V) est triangulaire inférieure (resp. supérieure) avec des 1 sur la diagonale et D diagonale. Quelle relation existe-t-il entre L et V ? Justifier votre réponse.
3) A est elle décomposable sous la forme de Cholesky ?

Exercice3 :(Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération)

Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse.

1/ $\|A\|_\infty<1$ la méthode de Jacobi associée au système AX=b converge.

2/ Soit G_S la matrice de Gauss Seidel associée au système AX=b. Si G_S est à DDS alors l'itération de Gauss Seidel converge.

3/ Soit J la matrice de Jacobi associée au système AX=b. $\rho(J)\geq 1 \Leftrightarrow$ L'itération de Jacobi diverge $\forall x_0$.

2011 - 2012

Corrigé de l'examen final.

EXO 1 : Soit $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ ____ (1)

1) On a : $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0,\ \forall x \in I = [1/2, 1]$

$f(1) = 1 + 1 - 1 = 1$

$f(1/2) = 1/8 + 1/2 - 1 = -\frac{3}{8} < 0$ } leur produit est négatif.

D'où l'unicité de la racine $\bar{x}$ ds I.

2) $f(x) = 0 \iff x^3 + x - 1 = 0 \iff x = 1 - x^3 = \varphi(x)$.

- La stabilité de φ :

On a : $\varphi(1) = 0 \notin I \Rightarrow \varphi$ n'est pas stable sur I.

- La contraction de φ :

On a : $\varphi'(x) = -3x^2 < 0,\ \forall x \in I$.

$\varphi'(x)$ est cont sur $I \Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^1(I)$.

D'où $L = \sup_{x \in I} |\varphi'(x)|$.

$\varphi''(x) = -6x < 0,\ \forall x \in I$.

x	$1/2$	1
$\varphi''(x)$	$-$	
$\varphi'(x)$	$-\frac{3}{4}$ $\searrow$	-3

$\sup_{x \in I} |\varphi'(x)| = 3 > 1 \Rightarrow \varphi$ n'est pas contractante sur I.

3) Pour la nature de la suite donnée, on ne peut rien dire.

4) - Comme f est une fct polynômiale alors $\varphi \in \mathcal{C}^2(I)$

- $\bar{x} \in I$.
- $f' \neq 0$ sur I
- $f''(x) = 6x > 0,\ \forall x \in I$
- $\begin{cases} f'(1) = 4 \\ f'(1/2) = 7/4 \end{cases} \Rightarrow |f'(\tfrac{1}{2})| < |f'(1)| \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

On a : $\left|\frac{f(1/2)}{f'(1/2)}\right| = \frac{3}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{3}{14} = 0{,}21 < 1 - \frac{1}{2} = 0{,}5$

Les cds du th de Newton étant vérifiées sur I, alors la méthode de Newton est applicable à f sur I.

5) La suite de Newton est donnée par $\begin{cases} y_0 \in I \\ y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} \end{cases}$

$y_0 = 1 \Rightarrow y_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow y_2 = \frac{3}{4} - \left(\frac{11}{64}\right)\left(\frac{16}{43}\right) = \frac{118}{172} \simeq 0.686 \Rightarrow y_3 \simeq 0.682$

Il faut calculer l'erreur, ici $y_3 - y_2 \simeq 10^{-2}$ ...

Exo 2 :

1) $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 2 & 1 & 2/3 \\ 1/2 & 1 & a/2 & a/3 \\ 1/3 & 2/3 & a/3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & \boxed{1} & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & \frac{2a-1}{4} & \frac{2a-1}{6} \\ 0 & 1/3 & \frac{2a-1}{6} & 8/9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{a-1}{2}} & \frac{a-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{a-1}{3} & 7/9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & \frac{a-1}{2} & \frac{a-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9-2a}{9} \end{pmatrix}$

Si : $\frac{a-1}{2} \neq 0$ i.e $a \neq 1$ Si : $\frac{9-2a}{9} \neq 0$ i.e $a \neq 9/2$

2) $A = LU$ pour $a \neq 1$ et $a \neq 9/2$.

$A = LDD^{-1}U = LDV$ où $V = D^{-1}U$; $D = (d_{ii})_{1 \le i \le 4}$ et $d_{ii} = u_{ii}$, $\forall i$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 5/9 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $V = {}^tL$. ; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/9 \end{pmatrix}$

On remarque que ${}^tA = A \Rightarrow {}^tA = {}^t\left((LD)(D^{-1}U)\right) = A = LU$

$\Rightarrow {}^t(D^{-1}U)\,{}^t(LD) = LU \Rightarrow {}^tV\,{}^t(LD) = LU$

Vu l'unicité de la décomposition de $LU \Rightarrow \boxed{{}^tV = L}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 2 & 1 & 2/3 \\ 1/2 & 1 & 1 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $u_{11} = 1 > 0$, $u_{22} = 1 > 0$, $u_{33} = \frac{1}{2} > 0$ et $u_{44} = \frac{5}{9} > 0$

Sinon pour les mineurs principaux $\begin{cases} \det(A_{[1]}) = 1 \\ \det(A_{[2]}) = 2 - 1 = 1 \\ \det(A_{[3]}) = 1/2 > 0 \\ \det(A_{[4]}) = 1(1)(\frac{1}{2})(5/9) = \frac{5}{18} > 0 \end{cases}$

A est définie positive et symétrique,

alors A se décompose dans la forme de Cholesky et on a : $A = {}^tRR$