Nom : Prénom : Groupe :

USTHB-Faculté de mathématiques
L2 ISIL B (Informatique)

Mardi 6 janvier 2015

Examen Final de Probabilités et Statitique

Exercice 1

Un site Internet possède trois serveurs dont les probabilités d'occupation sont de 0,4 pour le premier, 0,3 pour le deuxième et 0,5 pour le troisième. La probabilité que le premier et le deuxième soient occupés en même temps est de 0,25, celle que le premier et le troisième le soient en même temps est de 0,1 tandis que le deuxième et le troisième ne sont jamais occupés simultanément.
Soient les événements suivants:

E_i: *le serveur n°i est occupé* *pour i=1, 2, 3*

1) Exprimer en fonction de E_1, E_2 et E_3 les événements suivants:
A:"un serveur au moins est occupé", B:"un serveur au moins est libre",
C:"il y a exactement un seul serveur occupé" et D:"deux serveurs au plus sont libres".

$P(E_1)=0{,}4$; $P(E_2)=0{,}3$; $P(E_3)=0{,}5$; $P(E_1\cap E_2)=0{,}25$; $P(E_1\cap E_3)=0{,}1$; $E_2\cap E_3=\phi$ d'où $P(E_2\cap E_3)=0$

0,5 $A=E_1\cup E_2\cup E_3$

0,5 $B=\bar{E}_1\cup\bar{E}_2\cup\bar{E}_3=\overline{E_1\cap E_2\cap E_3}=\overline{E_1\cap\phi}=\bar{\Phi}=\Omega$

0,5 $C=(E_1\cap\bar{E}_2\cap\bar{E}_3)\cup(\bar{E}_1\cap E_2\cap\bar{E}_3)\cup(\bar{E}_1\cap\bar{E}_2\cap E_3)$

0,5 $D=\overline{\bar{E}_1\cap\bar{E}_2\cap\bar{E}_3}=E_1\cup E_2\cup E_3=A$

2) Calculer les probabilités des événements définis ci-dessus.

$*P(A)=P(E_1\cup E_2\cup E_3)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)-P(E_1\cap E_2)-P(E_1\cap E_3)-P(E_2\cap E_3)+P(E_1\cap E_2\cap E_3)$

$=0{,}4+0{,}3+0{,}5-0{,}25-0{,}1-0+0=0{,}85$ 0,5

$*\ P(B)=P(\Omega)=1$ 0,5

$*\ P(C)=P(E_1\cap\bar{E}_2\cap\bar{E}_3)+P(\bar{E}_1\cap E_2\cap\bar{E}_3)+P(\bar{E}_1\cap\bar{E}_2\cap E_3)$

Or $\bar{E}_2\cap\bar{E}_3=\Omega\cap(\bar{E}_2\cap\bar{E}_3)=(\bar{E}_1\cap\bar{E}_2\cap\bar{E}_3)\cup(E_1\cap\bar{E}_2\cap\bar{E}_3)$

alors $P(\bar{E}_2\cap\bar{E}_3)=P(\bar{E}_1\cap\bar{E}_2\cap\bar{E}_3)+P(E_1\cap\bar{E}_2\cap\bar{E}_3)$ 0,5

d'où $P(E_1\cap\bar{E}_2\cap\bar{E}_3)=P(\bar{E}_2\cap\bar{E}_3)-P(\bar{E}_1\cap\bar{E}_2\cap\bar{E}_3)=P(\overline{E_2\cup E_3})-P(\overline{E_1\cup E_2\cup E_3})$

et donc $P(E_1\cap\bar{E}_2\cap\bar{E}_3)=P(E_1\cup E_2\cup E_3)-P(E_2\cup E_3)$.

$P(\bar{E}_1\cap E_2\cap\bar{E}_3)=P(E_1\cup E_2\cup E_3)-P(E_1\cup E_3)$ 0,5

$P(\bar{E}_1\cap\bar{E}_2\cap E_3)=P(E_1\cup E_2\cup E_3)-P(E_1\cup E_2)$

$- P(E_1 \cup E_3) - P(E_1 \cup E_2) - P(E_2 \cup E_3)$ 0,5

D'où $P(C) = 3P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) - P(E_1 \cup E_3) - P(E_1 \cup E_2) - P(E_2 \cup E_3)$ ... $+ 3P(E_1 \cap$ ...

et donc $P(C) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - 2\left[P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)\right] + 3P(E_1 \cap$ ...

alors $P(C) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - 2\left[P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3)\right]$ 0,5

$= 0,4 + 0,3 + 0,5 - 2[0,25 + 0,1] = 0,5$

* $P(D) = P(A) = 0,85$ 0,5

3) Si deux serveurs sont occupés, quelle est la probabilité que ce soit le premier et le deuxième?

Soit E : "deux serveurs sont occupés"

$E = (E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3) \cup (E_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3) \cup (\bar{E}_1 \cap E_2 \cap E_3) = (E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3) \cup (E_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3)$ 0,5

$P(E) = P(E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3) + P(E_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3)$.

$= P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$.

$= P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) = 0,25 + 0,1 = 0,35$ 0,5

$$P(E_1 \cap E_2 / E) = \frac{P[E_1 \cap E_2 \cap E]}{P(E)} = \frac{P[(E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3) \cup (E_2 \cap E_2 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3)]}{P(E)} = \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap \bar{E}_3)}{P(E)}$$ 0,5

$$= \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E)} = \frac{0,25}{0,35} = \frac{5}{7}$$ 0,5

Exercice 2

Etant donné un espace probabilisé, on considère deux événements quelconques A *et* B. On note φ_A et φ_B leurs fonctions indicatrices et on pose $X = \varphi_A + \varphi_B$.

1) Décrire en fonction de A *et* B les événements $\{X = 0\}$, $\{X = 1\}$ et $\{X = 2\}$.

$\{X = 0\} = \{\varphi_A + \varphi_B = 0\} = \{\varphi_A = 0\} \cap \{\varphi_B = 0\} = \bar{A} \cap \bar{B}$ 0,5 0,5

$\{X = 1\} = (\{\varphi_A = 0\} \cap \{\varphi_B = 1\}) \cup (\{\varphi_A = 1\} \cap \{\varphi_B = 0\}) = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ 0,5 0,5

$\{X = 2\} = \{\varphi_A + \varphi_B = 2\} = \{\varphi_A = 1\} \cap \{\varphi_B = 1\} = A \cap B$ 0,5 0,5

2) On donne $p = P(A)$ et $q = P(B)$. Déterminer la loi de X lorsque

a A *et* B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A).P(B) = pq$

$P(X = 0) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}).P(\bar{B}) = (1-p)(1-q) = 1 + pq - p - q$ 0,5

$P(X = 1) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A}).P(B) + P(A).P(\bar{B}) = (1-p)q + p(1-q) = p + q - 2pq$ 0,5

$P(X = 2) = P(A \cap B) = P(A).P(B) = pq$ 0,5

b *A et B* sont incompatibles : $A \cap B = \phi$ et $P(A \cap B) = 0$

$P(X=0) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$

$= 1 - P(A) - P(B) = 1 - p - q$ 0,5

$P(X=1) = P[(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})] = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B).$

$= P(A) + P(B) = p + q$ 0,5

$P(X=2) = P(A \cap B) = 0$ 0,5

c $P(A \cap B) = \frac{p+q}{2}$

$P(X=0) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - p - q + \frac{p+q}{2} = 1 - \frac{p+q}{2}$ 0,5

$P(X=1) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = p + q - 2 \cdot \frac{p+q}{2} = 0$ 0,5

$P(X=2) = P(A \cap B) = \frac{p+q}{2}$ 0,5

3) Calculer $E(X)$ dans chacun des cas de la question précédente.

$E(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2).$

$\boxed{a}$ $E(X) = 0 \cdot (1 + pq - p - q) + 1(p + q - 2pq) + 2pq = p + q$ 0,5

$\boxed{b}$ $E(X) = 0 \cdot (1 - p - q) + 1 \cdot (p+q) + 2(0) = p + q$ 0,5

$\boxed{c}$ $E(X) = 0 \cdot \left[1 - \frac{p+q}{2}\right] + 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{p+q}{2} = p + q$ 0,5

Exercice 3

I. Montrer que si E_1, E_2 et E_3 sont des événements tels *que* $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \neq 0$, alors:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1).P(E_2/E_1).P(E_3/E_1 \cap E_2)$$

$E_1 \cap E_2 \cap E_3 \subset E_1 \cap E_2 \subset E_1 \Rightarrow 0 < P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \leq P(E_1 \cap E_2) \leq P(E_1)$

$$P(E_1).P(E_2/E_1).P(E_3/E_1 \cap E_2) = P(E_1).\frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}.\frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{P(E_1 \cap E_2)}$$

$$= P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$ 1

II. Une urne contient 6 boules rouges, 5 blanches et 5 noires.

1) On tire une boule au hasard. Définir les événements qu'il faut et donner la probabilité de tirer:

Soit les événements : R: "tirer une boule rouge", B: "tirer une boule blanche" et N: "tirer une boule noire"

[a] une rouge : $P(R) = \frac{6}{16}$ 0,25 **[b]** une blanche $P(B) = \frac{5}{16}$ 0,25 **[c]** une noire : $P(N) = \frac{5}{16}$ 0,25

[d] une rouge ou une blanche : $R \cap B = \phi$ 0,25

D'où $P(R \cup B) = P(R) + P(B) = \frac{6}{16} + \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$ 0,5

2) On tire maintenant successivement trois boules de l'urne. Choisir les événements qu'il faut po[ur] appliquer la formule précédente et calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une rouge, une bla[nche] et une noire lorsque:

Soient les événements :

R_i : "tirer une boule rouge au $i^{ème}$ essai"

B_i : "tirer une boule blanche au $i^{ème}$ essai" pour

N_i : "tirer une boule noire au $i^{ème}$ essai" 0,5

[a] le tirage se fait avec remise : R_1, B_2 et N_3 sont mutuellement indép[endants]

$$P(R_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(R_1).P(B_2).P(N_3) = P(R).P(B).P(N) = \frac{3}{8}.\frac{5}{16}.\frac{5}{16}$$ 0,5

[b] le tirage se fait sans remise :

$$P(R_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(R_1).P(B_2/R_1).P(N_3/R_1 \cap B_2)$$ 0,5

$$= \frac{3}{8}.\frac{5}{15}.\frac{5}{14} = \frac{5}{112}$$ 0,5