

Examen Final de Théorie des Graphes

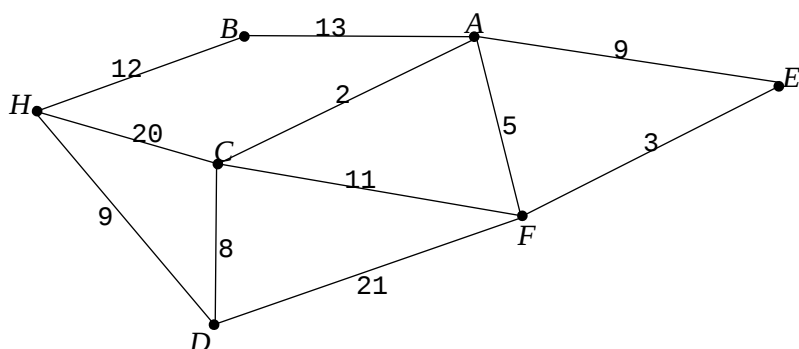
Exercice 1. (12 points)

Répondez à ce qui suit tout en justifiant :

1. Dans un groupe de personnes est tel que chaque personne est membre d'exactly deux (2) associations, chaque association comprend exactement trois (3) membres et deux (2) associations quelconques ont toujours exactement un (1) membre en commun. Combien y a-t-il de personnes ? Combien y a-t-il d'associations ? **(2 pts.)**
2. Montrez que dans un groupe de six (6) personnes, il y en a nécessairement trois (3) qui se connaissent mutuellement ou trois (3) qui ne se connaissent pas (on suppose que si A connaît B , B connaît également A). Cela est-il nécessairement vrai dans un groupe de cinq (5) personnes. **(2 pts.)**
3. Soit $G=(X, E)$ un graphe simple, d'ordre n . Si G est k -régulier, dans quelles conditions il est isomorphe à son complémentaire ? **(2 pts.)**
4. Soit $G=(X, E)$ un graphe connexe. Montrons qu'il existe un sommet $x \in X$ tel que le sous-graphe de G engendré par le sous ensemble de sommets $X-\{x\}$ est toujours connexe. **(2 pts.)**
5. Une société est constituée de Quinze (15) sites. Chaque site est relié par une ligne spécialisée à au moins sept (7) autres. Le serveur de bases de données est placé sur l'un des sites. Est-il possible d'accéder au serveur de bases de données à partir de n'importe quel autre site. **(2 pts.)**
6. Soit G un graphe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant une ou plusieurs arêtes ? **(2 pts.)**

Exercice 2. (8 points)

Des touristes sont logés dans un hôtel H . Un guide fait visiter six (6) sites touristiques (A, B, C, D, E et F). Le graphe ci-dessous représente cette situation, où les sommets représentent l'hôtel et les sites touristiques et chaque arête représente l'existence de route entre les deux (2) endroits étiquetée par la longueur de cette route.



1. Est-il possible pour ce guide, à partir de l'hôtel, d'emprunter toutes les routes (une seule et unique fois) ? Justifier. Si oui, où se terminera son parcours ? **(2 pts.)**
2. Est-il possible au guide de visiter tous les sites une seule et unique fois et revenir à l'hôtel ? Justifier. **(2 pts.)**
3. Déterminer les plus courts chemins qui le mènent de l'hôtel vers n'importe quel site. **(4 pts.)**