

## Examen Final de Théorie des Graphes

### Exercice 1. (7 points)

Soit un tournoi de volley-ball regroupant  $n$  clubs. Chaque club affronte un autre exactement une (1) seule fois. On veut représenter à travers un graphe les résultats de ce tournoi. Sachez qu'en volley-ball il n'y a pas de score d'égalité.

1. Modéliser (sans dessiner) le problème. Puis dessiner un exemple de graphe pour le cas de cinq (5) clubs.
2. Etudier les propriétés du graphe : simple, complet, régulier, symétrique, antisymétrique, transitif.
3. Est-il possible de trouver une situation où le club  $C_1$  a gagné contre  $C_2$  et  $C_2$  a battu  $C_3$  et ainsi de suite jusqu'à  $C_{n-1}$  a gagné contre  $C_n$  ? Justifier. ( $C_i$  est un club quelconque)
4. Dans quels cas, peut-on avoir la même situation et de plus  $C_n$  a gagné contre  $C_1$ .

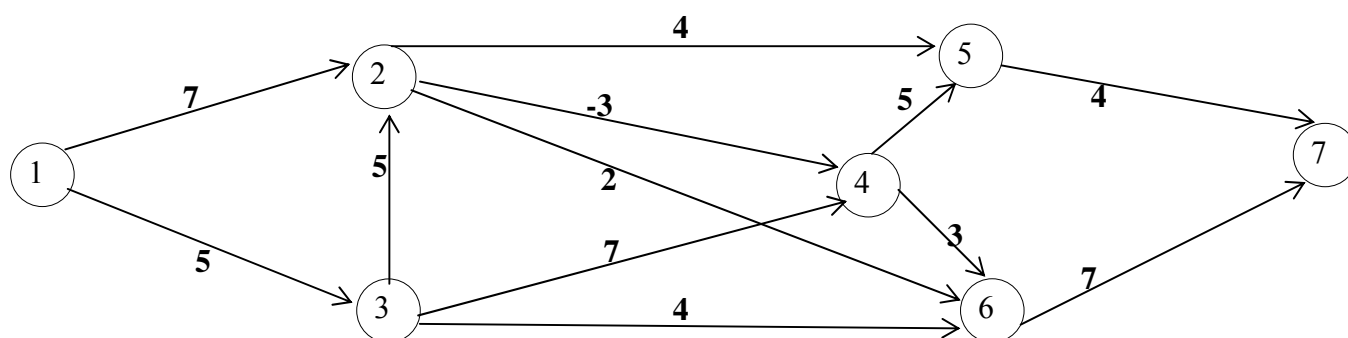
### Exercice 2. (7 points)

Soit  $G=(X, E)$  un graphe non-orienté simple d'ordre  $n=2p$ .

1. On suppose que le degré de chaque sommet est au moins égal à  $p$ . Démontrer que ce graphe est connexe.
2. On suppose que  $G$  est connexe et que  $x$  est un sommet de  $G$  de degré 1. Prouvez que  $G \setminus \{x\}$  (le sous-graphe de  $G$  engendré par l'ensemble de sommets  $X - \{x\}$ ) est connexe.
3. En déduire que si  $G$  est connexe et d'ordre  $n \geq 2$ , alors  $G$  comporte au moins  $n-1$  arêtes.
4. Démontrer que si  $G$  d'ordre  $n \geq 3$  comporte au moins  $(n-1)(n-2)/2$  arêtes, alors  $G$  est connexe.

### Exercice 3. (6 points)

Soit le graphe valué suivant :



1. Décomposer le graphe en niveau
2. Trouver tous les chemins optimaux en démarrant du sommet source.
3. L'algorithme de Dijkstra n'admet pas qu'il y ait des poids négatifs dans le graphe. On rajoute +4 au poids de chaque arc afin de les rendre tous positifs.
  - a. Trouver tous les chemins optimaux à partir du sommet source dans le nouveau graphe.
  - b. Est-il possible d'utiliser ce raisonnement pour résoudre le problème du chemin de poids optimal à l'aide de l'algorithme de Dijkstra dans des graphes ayant des poids négatifs.