

Examen Final (durée 1h30)

Exercice n°1 :

Etant donné un espace probabilisé, on considère deux événements A et B tels que $P(A) = 1/5$ et $P(B) = 2/5$.

- 1) On suppose que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1/2$
 - [a] Les événements A et B sont-ils indépendants ?
 - [b] Calculer $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} | B)$, $P(A \cap \overline{B})$ et $P(B | \overline{A})$.
- 2) On suppose que $P(A | \overline{B}) = 1/5$
 - [a] Les événements A et B sont-ils indépendants ?
 - [b] Calculer $P(A \cup B)$ et $P(B | \overline{A})$.
- 3) Etudier l'indépendance de deux événements E et F dans chacun des cas suivants :
 - [a] $E \subset F$
 - [b] E et F incompatibles.

Exercice n°2 :

Soit X une variable aléatoire sur Ω définie par :

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{et} \quad P(X = i) = \frac{\alpha}{i} \quad \forall i \in X(\Omega)$$

- 1) Calculer la constante α .
- 2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
- 3) Donner la fonction de répartition de X.
- 4) Soit $Y = X - \alpha$. Donner la loi de Y. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$

Exercice n°3:

Un site Internet possède trois serveurs dont les probabilités d'occupation sont de 0,4 pour le premier, 0,3 pour le deuxième et 0,5 pour le troisième. La probabilité que le premier et le deuxième soient occupés en même temps est de 0,25, celle que le premier et le troisième le soient en même temps est de 0,1 tandis que le deuxième et le troisième ne sont jamais occupés simultanément. Soient les événements suivants :

E_i : « le serveur n°i est occupé » pour $i=1, 2, 3$

- 1) Exprimer en fonction de E_1 , E_2 et E_3 les événements suivants :
A : «un serveur au moins est occupé», B : «un serveur au moins est libre», C : «il y a exactement un seul serveur occupé» et D : «deux serveurs au plus sont libres».
- 2) Calculer les probabilités des événements définis ci-dessus.
- 3) Si deux serveurs sont occupés, quelle est la probabilité que ce soit le premier et le troisième ?