Département Informatique /FEI
Licence L2 Informatique Générale section B
Exam Final d'Analyse Numérique **USTHB : 14/01/18**

Exercice 1.

Soit f une application de R dans R définie par $f(x) = \exp(x^2) - 4x^2$. On se propose de trouver les racines réelles de f.

1) Localiser les 4 racines de f (i.e. indiquer 4 intervalles disjoints qui contiennent chacun une seule et une seule racine)
2) Montre qu'il y'a une seule racine α comprise entre 0 et 1.
3) Soit la méthode du point fixe $\begin{cases} x_0 \in I = [0,1] \\ x_{n+1} = \emptyset(x_n) \end{cases}$ Avec $\emptyset$ l'application d R dans R définie par
$\emptyset(x) = \frac{\sqrt{\exp(x^2)}}{2}$
Examiner la convergence de cette méthode sur I et en préciser l'ordre de convergence.
4) Ecrire la méthode de Newton pour la recherche des zéros de la fonction f.
5) Entre la méthode ~~de Newton~~ proposée dans l'exercice et celle de Newton quelle est la plus efficace ? Justifier la réponse.

Exercice2.

Considérons la matrice A_n d'ordre n définie par ses coefficients comme suit :

$a_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; i = j \; ou \; j = n \\ -1 \; si \; i > j \\ 0 \; sinon \end{cases}$. Appliquer la méthode de Gauss classique à la matriceA_4, en déduire la décomposition LU de A_4. Faite de même à l'ordre n quelconque.

Exercice3.

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse :

Pour les4 premières assertions A une matrice carrée d'ordre n

1) A est S.D.P si et seulement si$A = LDL^t$ où L est une triangulaire inférieure qui a des 1 sur la diagonale et D une diagonale telle que $D_{ii} > 0 \; \forall i = 1, .. n$.

2) Si A admet la décomposition $A = LU = LDV$ alors A^t admet la décomposition $A^t = \tilde{L}\tilde{U}$. Si c'est vrai donner $\tilde{L}$ et $\tilde{U}$ en fonction de $L, D \; et \; V$.

3) si A est S.D.P les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent.

4) si A^t est D.D.S alors $\left\|J_A\right\|_1 < 1$.

5) l'itération du point fixe suivante convergeant vers $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ $\begin{cases} x_0 donné \\ x_{n+1} = \frac{x_n(x_n{}^2+3a)}{3x_n{}^2+a} \end{cases}$ est au moins d'ordre de convergence égal à 3.

6) Considérons le système linéaire $AX = b$ avec $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \alpha \end{pmatrix}$, la méthode de Gauss-Seidel associé au système converge si $\gamma = 0 \; et \; \beta = \delta \; et \; \alpha > 0 et(\alpha^2 - \beta^2) > 0$.