USTHB-FEI-Département d'informatique

$2^{ème}$ année Licence- Informatique Générale/ISIL **Rattrapage Logique Mathématique** 2014-2015

Exercice 1

1. Montrer que :
   a) $\forall n \geq 2, \neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots\ldots \wedge \alpha_n) \equiv \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \vee \ldots\ldots \vee \neg\alpha_n$ (*Indication par récurrence*)
   b) $\vdash \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \ldots\ldots \vee \neg\alpha_n \vee \alpha$ ssi $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n, \neg\alpha\}$ est inconsistant sans utiliser le théorème de consistance et complétude vu en cours.
2. Montrer l'équivalence suivante sans utiliser les tables de vérité :
   $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
3. Donner les clauses de l'algorithme de réfutation du connecteur $\vee$.
4. Vérifier si les déductions suivantes sont correctes en utilisant l'algorithme de réfutation :
   a) $P \vee \neg Q \vee R, P \vee Q \vdash P \vee R$
   b) $\neg P \vee (Q \vee R), \neg Q \vee S, R \vee S \vdash \neg P \vee S$

Exercice 2

Montrer les déductions suivantes dans le système déductif $L(\forall, \neg, \wedge, \rightarrow)$:

a. $P \vee (\neg P \wedge Q) \vdash P \vee Q$
b. $\neg P \rightarrow \neg Q \vee R, \neg P \rightarrow Q \vdash P \vee R$
c. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \vdash P \vee (Q \wedge R)$
d. $\forall x(P(x) \rightarrow R(x)), \exists x (Q(x) \wedge P(x)) \vdash \exists x (Q(x) \wedge R(x))$
e. $\vdash \forall x \exists y \exists z (P(x,y) \wedge \neg P(x,z) \rightarrow \neg P(y,z))$

Rappel : $\alpha \vee \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$.

Exercice 3:

Soit le langage L comprenant :

- Trois (5) symboles de constante a, b, c, d, e;
- Des symboles de prédicats unaires *PD*, LN, TG, GF, DS et NS et d'un symbole de prédicat binaire FC.

Soit I une interprétation de domaine D représentant les animaux d'une annexe d'un zoo qui comporte 2 Lions (Simba et Alex), 1 Girafe femelle (Sona), 1 Panda femelle (Mulan) et 1 Tigre blanc (Jambi). Pendant le dernier semestre de l'année 2014, Sona et Mulan ont donné naissance à des petits. Notons que le Panda et le Tigre blanc sont des **animaux en voie de disparition.** On supposera que le Tigre JAMBI est plus féroce que tous les animaux. Vient après le Lion qui est plus féroce que tous les animaux qui restent. Ensuite, c'est la Girafe qui est plus féroce que le Panda. **Notons que la relation « plus féroce que » n'est pas réflexive.**

L'interprétation I est définie par :

I(a)=Mulan; **I(b)**=Sona ; **I(c)**=JAMBI ; **I(d)**=Simba ; **I(e)**=Alex ; **I(PD) (x)** : « x est un Panda » ; **I(LN) (x)** : « x est un Lion **I(TG)**= « x est un Tigre » ; »; I(GF)= « x est une Girafe » ; **I(DS) (x)** : « x est un animal en voie de disparition **I(NS)(x) :** « x donne naissance à un petit » ; **I(FC)(x, y)** : « x est plus Féroce que y » ;

Q1/ Formaliser les phrases suivantes en logique des prédicats

a. Jambi est plus féroce que Simba et Alex
b. Les girafes ne sont pas des animaux en voie de disparition.
c. Dans le zoo, il y a des animaux en voie de disparition qui ont donné naissance à des petits.

Q2/ Etudier la satisfiabilité ou la validité des formules suivantes en justifiant vos réponses:

a. $\forall x \ (F(c,x) \rightarrow F(x, a))$
b. $\forall x \exists y (F(x,y) \rightarrow F(a, y))$
c. $DS(x) \rightarrow \forall y (NS(y) \rightarrow F(x, y))$
d. $\exists x (TG(x) \rightarrow F(y,x))$

Bon Courage

Ex1

1/ a) $\forall n \geq 2$, $\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \equiv \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \vee \dots \vee \neg\alpha_n$

On montre par recurrence sur n

$n = 2$:

α_1	α_2	$\neg\alpha_1$	$\neg\alpha_2$	$\alpha_1 \wedge \alpha_2$	$\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$	$\neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

d'après la T.V. $\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \equiv \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2$

Cas general

On suppose : $\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k) \equiv \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \vee \dots \vee \neg\alpha_k \quad \forall\, k \leq n,\ k \geq 2$

et on montre : $\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \alpha_{n+1}) \equiv \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \vee \dots \vee \neg\alpha_n \vee \neg\alpha_{n+1}$

$$\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \alpha_{n+1}) \equiv \neg\big((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \wedge \alpha_{n+1}\big)$$

$$\equiv \neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \vee \neg\alpha_{n+1}$$

$$\overset{H.R}{\equiv} \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \vee \dots \vee \neg\alpha_n \vee \neg\alpha_{n+1}$$

b/ $\vdash \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \dots \vee \neg\alpha_n \vee \alpha$ ssi $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \neg\alpha\}$ inconsistant

Par recurrence sur n

$n = 1$

$\vdash \neg\alpha_1 \vee \alpha \iff \{\neg(\neg\alpha_1 \vee \alpha)\}$ inconsistant

$\iff \{\neg\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha\}$ inconsistant en appliquant l'algorithme de réfutation

$\downarrow$

$\{\neg\neg\alpha_1, \neg\alpha\}$ inconsistant

$\downarrow$

$\{\alpha_1, \neg\alpha\}$ inconsistant.

Cas général

On suppose :

$$\vdash \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \vee \dots \vee \neg\alpha_k \vee \alpha \text{ ssi } \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \neg\alpha\} \text{ inconsistant pour tout } 1 \leq k \leq n$$

Et on montre :

$$\vdash \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \vee \dots \vee \neg\alpha_n \vee \neg\alpha_{n+1} \vee \alpha \overset{?}{\Leftrightarrow} \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \neg\alpha\} \text{ incons.}$$

$$\vdash \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \vee \dots \vee \neg\alpha_n \vee \neg\alpha_{n+1} \vee \alpha \Leftrightarrow \vdash \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \vee \dots \vee (\neg\alpha_n \vee \neg\alpha_{n+1}) \vee \alpha$$

$$\text{d'après } a/ \Leftrightarrow \vdash \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2 \vee \dots \vee \neg(\alpha_n \wedge \alpha_{n+1}) \vee \alpha$$

$$\overset{H.R.}{\Leftrightarrow} \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \wedge \alpha_{n+1}, \neg\alpha\} \text{ inconsist.}$$

$$\text{Alg. de réfutat}^{\circ} \Leftrightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \neg\alpha\} \text{ ''}$$

2/ $(p \to r) \wedge (q \to r) \overset{?}{\equiv} (p \vee q) \to r$

$$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv \neg(p \wedge \neg r) \wedge \neg(q \wedge \neg r)$$

$$\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$$

$$\equiv \neg(p \vee q) \vee r$$

$$\equiv \neg((p \vee q) \wedge \neg r)$$

$$\equiv (p \vee q) \longrightarrow r$$

3/ Clause du 'v' :

$$\Gamma = \Sigma \cup \{\alpha \vee \beta\} = \Sigma \cup \{\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)\}$$

$$\Sigma \cup \{\neg\neg\alpha\} \qquad \Sigma \cup \{\neg\neg\beta\}$$

$$\Gamma_1 = \Sigma \cup \{\alpha\} \qquad \Gamma_2 = \Sigma \cup \{\beta\}$$

Γ_1 et Γ_2 inconsistant $\Rightarrow \Gamma$ inconsistant.

Γ_1 ou Γ_2 satisfaisable $\Rightarrow \Gamma$ satisfaisable.

$$\Gamma' = \Sigma \cup \{\neg(\alpha \vee \beta)\} = \Sigma \cup \{\neg\alpha \wedge \neg\beta\}$$

$$\Gamma' = \Sigma \cup \{\neg\alpha, \neg\beta\}$$

Γ' inconsistant $\Rightarrow \Gamma$ inconsistant

Γ' satisfaisable $\Rightarrow \Gamma$ satisfaisable.

4/ $P \vee \neg Q \vee R,\ P \vee Q \vdash P \vee R$ ssi $\{P \vee \neg Q \vee R,\ P \vee Q,\ \neg(P \vee R)\}$ inconsist.

$$\Gamma = \{(P \vee \neg Q) \vee R,\ P \vee Q,\ \underline{\neg(P \vee R)}\}$$

$$\{\underline{(P \vee \neg Q) \vee R},\ P \vee Q,\ \neg P,\ \neg R\}$$

$$\{\underline{P \vee \neg Q},\ P \vee Q,\ \neg P,\ \neg R\} \qquad \Gamma_1 = \{\underline{R},\ P \vee Q,\ \neg P,\ \underline{\neg R}\}$$

$$\Gamma_2 = \{\underline{P},\ P \vee Q,\ \underline{\neg P},\ \neg R\} \qquad \{\neg Q,\ \underline{P \vee Q},\ \neg P,\ \neg R\}$$

$$\Gamma_3 = \{\neg Q,\ \underline{P},\ \underline{\neg P},\ \neg R\} \qquad \{\underline{\neg Q},\ \underline{Q},\ \neg P,\ \neg R\} = \Gamma_4$$

Γ_1 et Γ_2 et Γ_3 et Γ_4 sont inconsistants

$\Rightarrow P \vee \neg Q \vee R,\ P \vee Q \vdash P \vee R$.

b/ $\neg P \vee (Q \vee R),\ \neg Q \vee S,\ R \vee S \vdash \neg P \vee S$

$$\Gamma = \{\neg P \vee (Q \vee R),\ \neg Q \vee S,\ R \vee S,\ \underline{\neg(\neg P \vee S)}\}$$

$$\downarrow$$

$$\{\neg P \vee (Q \vee R),\ \neg Q \vee S,\ R \vee S,\ \underline{\neg\neg P},\ \neg S\}$$

$$\downarrow$$

$$\{\neg P \vee (Q \vee R),\ \neg Q \vee S,\ \underline{R \vee S},\ P,\ \neg S\}$$

$$\{\underline{\neg P \vee (Q \vee R)},\ \neg Q \vee S,\ R,\ P,\ \neg S\} \quad \{\neg P \vee (Q \vee R),\ \neg Q \vee S,\ \underline{S},\ P,\ \underline{\neg S}\}$$

$$\{\neg \underline{P},\ \neg Q \vee S,\ R,\ \underline{P},\ \neg S\} \quad \{Q \vee R,\ \underline{\neg Q \vee S},\ R,\ P,\ \neg S\}$$

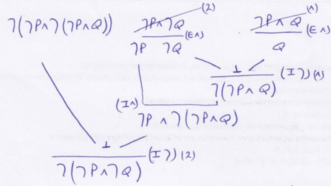
$$\{Q \vee \underline{R},\ \neg Q,\ R,\ P,\ \neg S\} \quad \{Q \vee R,\ \underline{S},\ R,\ P,\ \underline{\neg S}\}$$

$$\{\underline{Q},\ \neg \underline{Q},\ R,\ P,\ \neg S\} \quad \{R,\ \neg Q,\ R,\ P,\ \neg S\} = \Gamma'$$

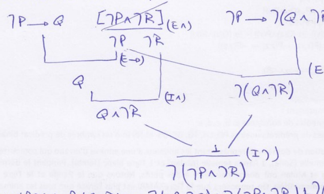
Γ' satisfaisable $\Rightarrow$ La déduction n'est pas vérifiée.

Ex 2

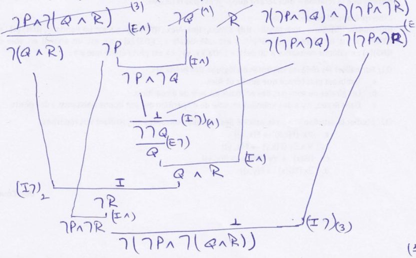
a/ $P \vee (\neg P \wedge Q) \vdash P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg(\neg P \wedge Q)) \vdash \neg(\neg P \wedge \neg Q)$



b/ $\neg P \to \neg Q \vee R,\ \neg P \to Q \vdash P \vee R \Leftrightarrow \neg P \to \neg(Q \wedge \neg R),\ \neg P \to Q \vdash \neg(\neg P \wedge \neg R)$



c/ $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \vdash P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg(\neg P \wedge \neg R) \vdash \neg(\neg P \wedge \neg(Q \wedge R))$



Autre solution

b/ $\neg P \to \neg Q \vee R,\ \neg P \to Q \vdash P \vee R$

$\Leftrightarrow \neg P \to \neg(Q \wedge \neg R),\ \neg P \to Q \vdash \neg(\neg P \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow \neg P \to (Q \to R),\ \neg P \to Q \vdash \neg P \to R$

$\Leftrightarrow \neg P \to (Q \to R),\ \neg P \to Q,\ \neg P \vdash R$

$$\dfrac{\dfrac{\neg P \to (Q \to R) \quad \neg P}{Q \to R}(E\to) \qquad \dfrac{\neg P \quad \neg P \to Q}{Q}(E\to)}{R}$$

a/ $P \vee (\neg P \wedge Q) \vdash P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg(\neg P \wedge Q)) \vdash \neg(\neg P \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow \neg P \to \neg P \wedge Q \vdash \neg P \to Q \Leftrightarrow \neg P \to \neg P \wedge Q,\ \neg P \vdash Q$

$$\dfrac{\dfrac{\neg P \to \neg P \wedge Q \quad \neg P}{\neg P \wedge Q}(E\to)}{Q}$$

c/ $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \vdash P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg(\neg P \wedge \neg R) \vdash \neg(\neg P \wedge \neg(Q \wedge R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \to Q) \wedge (\neg P \to R) \vdash \neg P \to (Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \to Q) \wedge (\neg P \to R),\ \neg P \vdash Q \wedge R$

$$\dfrac{(\neg P \to Q) \wedge (\neg P \to R)}{\neg P \to Q \qquad \neg P \to R}(E\wedge)\times 2$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg P \quad \neg P \to Q}{Q}(E\to) \qquad \dfrac{\neg P \to R \quad \neg P}{R}(E\to)}{Q \wedge R}(I\wedge)$$

(5')

$$d/\ \forall x\,(P(x) \to R(x)),\ \exists x\,(Q(x) \land P(x)) \vdash \exists x\,(Q(x) \land R(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x\,(P(x) \to R(x)),\ \neg\forall x\,\neg(Q(x) \land P(x)) \vdash \neg\forall x\,\neg(Q(x) \land R(x))$$

$$\dfrac{Q(x) \land P(x)}{Q(x) \quad P(x)}\,(E\land) \qquad C\,\dfrac{\forall x\,(P(x) \to R(x))}{P(x) \to R(x)}\,(E\forall) \qquad C\,\dfrac{\forall x\,\neg(Q(x) \land R(x))}{\neg(Q(x) \land R(x))}\,(E\forall) \qquad \neg\forall x\,\neg(Q(x) \land P(x))$$

$$\dfrac{P(x) \quad P(x) \to R(x)}{R(x)}\,(E\to)$$

$$\dfrac{Q(x) \quad R(x)}{Q(x) \land R(x)}\,(I\land)$$

$$\dfrac{Q(x) \land R(x) \quad \neg(Q(x) \land R(x))}{\bot}$$

$$\dfrac{\bot}{\neg(Q(x) \land P(x))}\,(I\neg)$$

$$\dfrac{\neg(Q(x) \land P(x))}{\forall x\,\neg(Q(x) \land P(x))}\,(I\forall)$$

$$\dfrac{\forall x\,\neg(Q(x) \land P(x)) \quad \neg\forall x\,\neg(Q(x) \land P(x))}{\bot}$$

$$\dfrac{\bot}{\neg\forall x\,\neg(Q(x) \land R(x))}\,(I\neg)$$

$$e/\ \vdash \forall x\,\exists y\,\exists z\,(P(x,y) \land \neg P(x,z) \to \neg P(y,z))$$

$$\Leftrightarrow\ \vdash \forall x\,\neg\forall y\,\neg\exists z\,(P(x,y) \land \neg P(x,z) \to \neg P(y,z))$$

$$\Leftrightarrow\ \vdash \forall x\,\neg\forall y\,\forall z\,\neg(P(x,y) \land \neg P(x,z) \to \neg P(y,z))$$

EX3

$I(a) =$ Mulan Panda femelle

$I(b) =$ Sona Girafe

$I(c) =$ Jambi Tigre blanc

$I(d) =$ Simba Lion

$I(e) =$ Alex Lion

$I(PD)(x) = x$ est un Panda

$I(LN)(x) = x$ est un Lion

$I(TG)(x) = x$ est un Tigre

$I(GF)(x) = x$ est une Girafe

$I(DS)(x) = x$ est un animal en voie de disparition

$I(NS)(x) = x$ donne naissance à un petit

$I(FC)(x, y) = x$ est plus féroce que y

Tigre > Lion > Girafe > Panda (le symbole > = plus féroce)

1/ a/ $FC(c, d) \wedge FC(c, e)$

b/ $GF(x) \rightarrow \neg DS(x)$

c/ $\exists x \; DS(x) \wedge NS(x)$

2/ a/ $\forall x \left(FC(c, x) \rightarrow FC(x, a)\right)$: α_1 formule fermée

$I(\alpha_1) =$ q'q soit d_1 un animal de zoo, Si Jambi est plus féroce que d_1 alors d_1 est plus féroce que le panda Mulan.

Mais Jambi (le tigre blanc) est plus féroce que Mulan (le Panda) alors que Mulan n'est pas plus féroce que lui même (la relation n'est pas réflexive).

$\Rightarrow$ α_1 n'est pas valide. $I \not\models \alpha_1$

b/ $\forall x\, \exists y \left(FC(x, y) \rightarrow FC(a, y) \right) : \alpha_2$ formule fermée.

$I(\alpha_2)$ = q/q soit d_1 un animal de Zoo, il existe d_2 un animal de Zoo tq si d_1 est plus féroce que d_2 alors le panda Mulan est plus féroce que d_2

Sachant que $FC(a, y)$ est faux pour toute valeur de y car le panda Mulan est le moins féroce.

Donc pour toute valeur de d_1, il faut chercher une valeur d_2 pour laquelle $FC(d_1, d_2)$ soit fausse pour que l'implication soit vraie.

x	y	$FC(x, y) \rightarrow FC(a, y)$
Tigre	m̂ tigre	(Faux $\rightarrow$ Faux) = vrai
Lion	m̂ Lion ou Tigre	(Faux $\rightarrow$ Faux) = vrai
Girafe	m̂ girafe, Lion ou Tigre	(Faux $\rightarrow$ Faux) = vrai
Panda	m̂ Panda, Girafe, Lion ou Tigre	(Faux $\rightarrow$ Faux) = vrai

Il suffit donc de prendre pour chaque valeur de x, une valeur de y = m̂ valeur de x ou un animal **plus** féroce.

$\Rightarrow I \models \alpha_2$

c/ $DS(x) \to \forall y\,(NS(y) \to FC(x,y))$: α_3 formule non fermée

$I(\alpha_3)$ = <u>Si</u> $V(x)$ est un animal en voie de disparition

<u>Alors</u> qlq soit l'animal d_1, <u>Si</u> d_1 donne naissance à un petit alors il est moins féroce que $V(x)$.

La variable libre est x, On cherche pour toute valeur de x, la valeur de verité de α_3.

x	$DS(x)$	y	$NS(y)$	$FC(x,y)$	$NS(y) \to FC(x,y)$	$\forall y(NS(y) \to FC(x,y))$	α_3
Tigre	<u>Vrai</u>	Tigre	F		V	<u>Vrai</u>	(Vrai → Vrai) Vrai
		Lion	F		V		
		Girafe	V	V	V		
		Panda	V	V	V		
Lion	<u>Faux</u>						(Faux →) Vrai
Girafe	<u>Faux</u>						(Faux →) Vrai
Panda	<u>Vrai</u>	Tigre	F		V	<u>Faux</u>	(Vrai → Faux) Faux
		Lion	F		V		
		Girafe	V	F	F		
		Panda	V	F	F		

On déduit à partir du tableau que :

$$\left.\begin{array}{l} I \models \alpha_3\,[x = \text{Tigre}] \\ I \models \alpha_3\,[x = \text{Lion}] \\ I \models \alpha_3\,[x = \text{Girafe}] \\ I \not\models \alpha_3\,[x = \text{Panda}] \end{array}\right\} \Rightarrow I \not\models \alpha_3$$

d/ $\exists x \, (TG(x) \to FC(y, x))$: α_4 formule non fermée.

$I(\alpha_4)$ = Il existe d_1 un animal tq si d_1 est un tigre alors il est moins féroce de $V(y)$.

Pour rendre la formule vraie, il suffit de prendre pour chaque valeur de y, une valeur de x pour laquelle $TG(x)$ est faux pour que l'implicat° soit vraie.

Exemple : x = Lion $\Rightarrow TG(x) = \text{Faux} \Rightarrow TG(x) \to FC(y, x)$ est vraie qlq soit la valeur de y

Donc α_4 est satisfaisable par toute valuat° de y pour l'interpretation I

$\Rightarrow I \models \alpha_4$