EXERCICE I

Soient 3 connecteurs binaires définis par leur table de vérité ci-dessous :

A	B	**A wB**	**A↓B**	**A\B**
V	V	**F**	**F**	**F**
V	F	**V**	**F**	**V**
F	V	**V**	**F**	**F**
F	F	**F**	**V**	**F**

1. Trouver pour chacun d'eux une formule équivalente ne contenant que les connecteurs $\neg$ et $\vee$ puis simplifier les formules obtenues.
2. Parmi les expressions proposées ci-dessous en langage naturel, choisir pour chaque connecteur celle qui lui correspond :
   - Ou bien A ou bien B (pas les deux en même temps)
   - A quelque soit B
   - A mais pas B
   - Non A mais B
   - Ni A ni B
   - A si non B
   - A si B
3. Montrer que $\{\neg, \backslash\}$ est un système complet de connecteurs (SCC) sachant que $\{\neg, \vee\}$ est un SCC.
4. Rappeler les clauses de l'algorithme de réfutation du connecteur $\vee$ puis donner celles du connecteur \.
5. Montrer la déduction $\neg(P\backslash\neg(Q\backslash R)) \vdash \neg(\neg(P\backslash Q)\backslash\neg(P\backslash R))$ en utilisant l'algorithme de réfutation modifié.

EXERCICE II :

Q1/ Montrer dans le langage L1($\neg, \wedge, \forall$) :

1. $\vdash (\alpha\rightarrow\beta)\vee(\beta\rightarrow\alpha)$
2. $\forall x(\beta(x)\rightarrow\delta(x)), \exists x(\alpha(x)\wedge\neg\delta(x)) \vdash \exists x(\alpha(x)\wedge\neg\beta(x))$

Q2/ Montrer dans Le langage L2($\neg,\rightarrow, \forall$) :

1. $\forall x\, \neg Q(x), \exists x\, (P(x)\vee Q(x)) \vdash \exists x\, P(x)$
2. $(P\rightarrow Q) \rightarrow(R \rightarrow S), \neg S\vee\neg Q , P \rightarrow Q \vdash \neg R\vee\neg P$

Rappels: a. $\Gamma, \alpha \vdash \beta \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha\rightarrow\beta$ b. $\alpha , \alpha\rightarrow\beta \vdash \beta$ c. $\alpha\vee\beta =_{def} \neg\alpha\rightarrow\beta$

EXERCICE III :

Soit le langage L comprenant un symbole de constante a, un symbole de fonction unaire s et deux symboles de prédicats, un unaire P et l'autre binaire D. Soit I l'interprétation de domaine N définie par :

I(a) = 0 ; I(s) : N → N est la fonction successeur, tel que I(s)(n) = n + 1 ; I(P) $\subset$ N est l'ensemble des nombre pairs ; I(D) $\subset$ N x N est la relation « est double de », définie pour tout n, m $\in$N par (n,m) $\in$ I(D) ssi n = 2 * m.

Q1/ En tenant compte de l'interprétation I définie ci-dessus, traduisez les énoncés suivants en formules du calcul des prédicats.

a. 3 est pair.
b. Si un nombre n'est pas pair, alors son successeur l'est.
c. Si un nombre est pair, alors il est le double d'un nombre.

Q2/ Dites si l'interprétation I satisfait les formules suivantes en justifiant vos réponses:

$\alpha_1 = \forall x\, \forall y\, (D(x,y) \rightarrow \neg P(s(x)))$

$\alpha_2 = \forall x\, \forall y\, (D(x,y) \wedge P(y))$

$\alpha_3 = \forall x\, (P(s(a)) \rightarrow P(x))$

$\alpha_4 = \exists x\, (P(y) \wedge D(z,x) \wedge D(x,y)) \rightarrow \neg \exists w\, (D(w,y) \wedge P(s(w)))$

BON COURAGE