Exercice 1 :

On utilise la logique propositionnelle, pour connaître le(s) vainqueur(s) du championnat régional de kung fu wushu de la Wilaya de Boumerdes qui se déroule aux ISSER. Ce championnat est qualificatif pour la phase nationale.

Données : On connaît le nom des participants de la catégorie juniors (- 48kg) susceptible (*risque*) d'être sélectionnés dans l'équipe nationale. Il s'agit du lycéen Ryane de Boumerdes et des collégiens Nassim de Naciria et Khaled des Isser. On suppose qu'on peut sélectionner plusieurs candidats (vainqueurs).

Avant de proclamer les résultats finaux, les 3 élèves se mettent à deviner qui sera vainqueur :
Ryane suppose : « C'est Nassim le vainqueur mais pas Khaled»
Nassim suppose : « Si Ryane n'est pas le vainqueur alors Khaled ne l'est pas aussi »
Khaled suppose : « Je suis vainqueur si et seulement si aucun des deux autres n'est vainqueur ».

On utilise les variables propositionnelles R, N et K pour exprimer respectivement que Ryane est le vainqueur, Nassim est le vainqueur et Khaled est le vainqueur.

1. Exprimer les trois suppositions en langage propositionnel, soient α, β et δ les formules obtenues.
2. Représenter les trois formules dans la même table de vérité, en plaçant les V.P. dans cet ordre :

R	N	K

3. Est-ce que $\{\alpha, \beta, \delta\}$ est satisfaisable ? Dans ce cas, peut-on conclure qui est le vainqueur?
4. En supposant qu'il n y a pas de vainqueur, peut-on savoir qui a fait une fausse supposition?
5. En supposant que toutes les déclarations sont fausses, peut-on conclure qui est le vainqueur ?
6. En utilisant les clauses ci-dessous en plus des clauses vues en cours, appliquer l'algorithme de réfutation modifié sur l'ensemble $\{\alpha, \beta, \delta, \neg R\}$. Que peut-on conclure? Justifier votre réponse.

$\{\alpha \to \beta\}$	$\{\neg(\alpha \to \beta)\}$	$\{\alpha \vee \beta\}$	$\{\neg(\alpha \vee \beta)\}$	$\{\alpha \leftrightarrow \beta\}$	$\{\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)\}$
$\{\neg\alpha\}$ $\{\beta\}$	$\{\alpha, \neg\beta\}$	$\{\alpha\}$ $\{\beta\}$	$\{\neg\alpha, \neg\beta\}$	$\{\neg\alpha, \neg\beta\}$ $\{\alpha, \beta\}$	$\{\alpha, \neg\beta\}$ $\{\neg\alpha, \beta\}$

Les clauses des connecteurs $\to$, $\vee$ et $\leftrightarrow$

Exercice 2 :

Montrer les déductions suivantes dans le langage Lp($\forall$, $\neg$, $\wedge$, $\to$) :

1. $\vdash ((A \to B) \to B) \to A \vee B$
2. $\vdash ((A \to C) \wedge (B \to C)) \to (A \vee B \to C)$
3. $\forall x\, \forall y\, (P(x, a) \to P(y, x) \to P(y, a)),\ \forall x\, \forall y\, (P(x, y) \to P(y, x)) \vdash P(a, a)$
4. $\exists x\, \forall y (P(x, y) \vee P(y, x)),\ \forall x (P(x, x) \to Q(x) \vee R(x)),\ \forall z\, (R(z) \to Q(z)) \vdash \exists u\, Q(u)$

Utiliser la définition suivante : $A \vee B =_{def} \neg(\neg A \wedge \neg B)$

USTHB- Département Informatique
Licence Informatique L2

Examen de Logique Mathématique

9-01-2017

Exercice 3 :

La maîtresse de maison **Fatima** a invité des amis à dîner et elle ne sait pas faire un plan de table, c'est-à-dire comment installer ses invités autour de la table. Grâce à la logique, on va l'aider en suivant quelques conseils pour que tout le monde s'entende bien et que son dîner soit réussi.

Conseils : Les personnes qui sont assises côte à côte sont amies. Ne pas placer deux hommes ou deux femmes les uns à côtés des autres donc alterner un homme une femme. Séparez toujours les couples (personnes mariées). Seule la maîtresse de maison ne respecte pas ces règles.

Modélisation : On se donne une interprétation I pour les prédicats suivants :

Voisin(x, y) : x est assis à côté de y
Ami(x, y) : x et y sont amis
Femme(x) : x est une femme
Couple(x,y) : x et y sont en couple

1. Exprimer par des formules logiques les phrases suivantes :
   (a) Les personnes qui sont assises côte à côte sont amis
   (b) Une femme n'est pas assise à côté d'une femme

2. On définit le domaine D={Omar, Mohamed, Ali, Lilia, Souad, Khadidja} pour l'interprétation I précédente.
Couple ={(Omar,Lilia) , (Ali,Souad)}
Voisin ={ (Omar,Souad), (Souad,Omar), (Souad,Mohamed), (Mohamed,Souad), (Mohamed,Khadidja), (Khadidja,Mohamed), (Khadidja, Ali),(Ali,Khadidja), (Ali, Lilia), (Lilia,Ali)}
Ami= Voisin

Etudier la validité et/ou la satisfaisabilité des formules suivantes

α: $\forall x \exists y$ (Couple(x,y) $\rightarrow$ voisin(x,y)) ;
β: Couple(x,y) $\rightarrow \exists z$ (Voisin(x,z) $\wedge$ Voisin(z,y))
γ: ($\forall x \forall y$ couple(x,y)) $\wedge \forall x \neg$ami(x, x) $\rightarrow$ voisin(x,y)

3. On complète l'interprétation I par le prédicat **Timide**(x) pour x est timide, et on ajoute le conseil de ne pas mettre côte à côte des amis timides.
Proposer une interprétation de la relation **Voisin** vérifiant les conseils et les formules précédentes pour le domaine D'= {Omar, Mohamed, Khaled, Nawel, Souad} sachant que Souad et Omar sont **Timides**, tous les invités sont *célibataires* et que tout le monde est **Ami**. Justifier votre réponse.

Bon Courage

EMD Logique Mathematique

2016 / 2017

Ex1

1/ $\alpha = N \wedge \neg K$

$\beta = \neg R \rightarrow \neg K$

$\delta = K \leftrightarrow \neg N \wedge \neg R$

2/

	R	N	K	¬R	¬N	¬K	¬N∧¬R	α	β	δ
L_1	V	V	V	F	F	F	F	F	V	F
L_2	V	V	F	F	F	V	F	V	V	V
L_3	V	F	V	F	V	F	F	F	V	F
L_4	V	F	F	F	V	V	F	F	V	V
L_5	F	V	V	V	F	F	F	F	F	F
L_6	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V
L_7	F	F	V	V	V	F	V	F	F	V
L_8	F	F	F	V	V	V	V	F	V	F

3/ L'ensemble $\{\alpha, \beta, \delta\}$ est satisfaisable pour les deux instanciations $\begin{cases} R = V,\ N = V \text{ et } K = F\ (L_2) \\ R = F,\ N = V \text{ et } K = F\ (L_6) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Nassim est Vainqueur, Khaled n'est pas vainqueur mais on peut rien conclure pour Ryane.

4/ Pas de vainqueur $\Leftrightarrow$ $R = F$, $N = F$ et $K = F$ (L_8)

pour laquelle $\alpha = F$, $\beta = V$ et $\delta = F$

$\Leftrightarrow$ Ryane et Khaled ont fait de fausse supposition

5/ Toutes les déclarations sont fausses $\Leftrightarrow$ $\alpha = F$ et $\beta = F$ et $\delta = F$: instanciation L_5 pour laquelle

$R = F$, $N = V$ et $K = V$

Nassim et Khaled sans dans ce cas vainqueurs

6/ Soit $\Gamma = \{\alpha, \beta, \delta, \neg R\}$

$$\Gamma = \{\underline{N \wedge \neg K}, \neg R \to \neg K, K \leftrightarrow \neg N \wedge \neg R, \neg R\}$$

$$\downarrow$$

$$\{N, \neg K, \underline{\neg R \to \neg K}, K \leftrightarrow \neg N \wedge \neg R, \neg R\}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\{N, \neg K, \underline{\underline{\neg\neg R}}, K \leftrightarrow \neg N \wedge \neg R, \underline{\underline{\neg R}}\} \qquad \{N, \neg K, \neg K, \underline{K \leftrightarrow \neg N \wedge \neg R}, \neg R\}$$

$$\bot$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\{N, \underline{\underline{\neg K}}, \underline{\underline{K}}, \neg N \wedge \neg R, \neg R\} \qquad \{N, \neg K, \neg K, \underline{\neg(\neg N \wedge \neg R)}, \neg R\}$$

$$\bot$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\{N, \neg K, \underline{\neg\neg N}, \neg R\} \qquad \{N, \neg K, \underline{\underline{\neg\neg R}}, \underline{\underline{\neg R}}\}$$

$$\bot$$

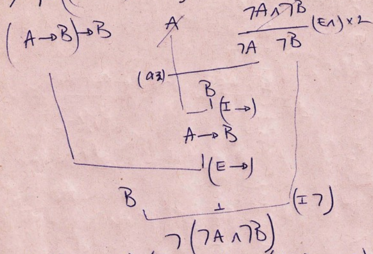
$$\downarrow$$

$$\Gamma'_1 = \{N, \neg K, N, \neg R\}$$

Γ_1 satisfaisable $\Rightarrow$ Γ satisfaisable et donc l'information Ryane est vainqueur n'est toujours pas confirmée. Ce qui confirme que Nassim est bien le vainqueur.

Ex2

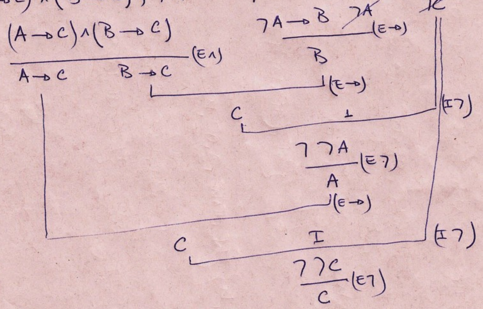
1/ $\vdash ((A \to B) \to B) \to A \vee B \Leftrightarrow (A \to B) \to B \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)$



2/ $\vdash ((A \to C) \wedge (B \to C)) \to (A \vee B \to C)$

$\Leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C) \vdash A \vee B \to C$

$\Leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C), \neg A \to B \vdash C$



3/ $\forall x \forall y \left(P(x,a) \to P(y,x) \to P(y,a)\right), \forall x \forall y \left(P(x,y) \to P(y,x)\right)$
$\vdash P(a,a)$

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\forall x \forall y \left(P(x,a) \to P(y,x) \to P(y,a)\right)}{\forall y \left(P(a,a) \to P(y,a) \to P(y,a)\right)}\,(E\forall)\ C_1}{P(a,a) \to P(a,a) \to P(a,a)}\,(E\forall)\ C_2
\qquad
\dfrac{\dfrac{\forall x \forall y \left(P(x,y) \to P(y,x)\right)}{\forall y \left(P(a,y) \to P(y,a)\right)}\,(E\forall)\ C_3}{P(a,a) \to P(a,a)}\,(E\forall)\ C_4
}{P(a,a)}\,(E\to)
$$

C_1 : a est libre pour x ds la formule

C_2 : a " " y "

C_3 : a " " x "

C_4 : a " " y "

4/ $\exists x \forall y \left(P(x,y) \vee P(y,x)\right), \forall x \left(P(x,x) \to Q(x) \vee R(x)\right), \forall z \left(R(z) \to Q(z)\right) \vdash \exists u\, Q(u)$

$\Leftrightarrow \neg \forall x \neg \forall y \left(P(x,y) \vee P(y,x)\right), \forall x \left(P(x,x) \to \neg(\neg Q(x) \wedge \neg R(x))\right), \forall z \left(R(z) \to Q(z)\right) \vdash \neg \forall u \neg Q(u)$

$\Leftrightarrow \neg \forall x \neg \forall y \neg \left(\neg P(x,y) \wedge \neg P(y,x)\right),$
$\forall x \left(P(x,x) \to \neg(\neg Q(x) \wedge \neg R(x))\right), \forall z \left(R(z) \to Q(z)\right) \vdash \neg \forall u \neg Q(u)$

$$c\ \frac{[\forall y \neg(\neg P(\cancel{x,y}) \wedge \neg P(y,x))]}{\neg(\neg P(x,\cancel{y}) \wedge \neg P(\cancel{y}, x))}(E\forall)$$

$$[P(\cancel{x,x})] \quad c\ \frac{\forall x (P(x,x) \to \neg(\neg Q(x) \wedge \neg R(x)))}{P(x,x) \to \neg(\neg Q(x) \wedge \neg R(x))}(E\forall)$$

$$\neg(\neg Q(x) \wedge \neg R(x)) \ (E\to)$$

$$[\cancel{R(x)}] \quad (E\forall)\ c\ \frac{\forall z (R(z) \to Q(z))}{R(x) \to Q(x)} \quad c\ \frac{[\cancel{\forall u \neg Q(u)}]}{\neg Q(x)}(E\forall)$$

$$Q(x) \ (E\to)$$

$$\bot$$

$$\neg R(x) \ (I\neg)$$

$$\neg Q(x) \wedge \neg R(x) \ (I\wedge)$$

$$\bot$$

$$\neg P(x,x) \ (I\neg)$$

$$\neg P(x,x) \quad \neg P(x,x)$$

$$\neg P(x,x) \wedge \neg P(x,x) \ (I\wedge)$$

$$\bot$$

$$c\ \frac{\neg\forall y \neg(\neg P(x,y) \wedge \neg P(y,x))}{\forall x \neg\forall y \neg(\neg P(x,y) \wedge \neg P(y,x))}(I\forall)$$

$$\neg\forall x \neg\forall y \neg(\neg P(x,y) \wedge \neg P(y,x))$$

$$\neg\forall u \neg Q(u) \ (I\neg)$$

EX3

$Voisin(x,y)$, $Ami(x,y)$, $Femme(x)$, $Couple(x,y)$

1/ a/ $Voisin(x,y) \rightarrow Ami(x,y)$

b/ $Femme(x) \wedge Femme(y) \wedge \neg Voisin(x,y)$

2/ $D = \{$Omar, Mohamed, Ali, Lilia, Souad, Khadidja$\}$

$\alpha = \forall x \, \exists y \, (Couple(x,y) \rightarrow Voisin(x,y))$: formule fermée

x	y	$Couple(x,y)$	$Voisin(x,y)$	$Couple(x,y) \rightarrow Voisin(x,y)$
Omar	Souad	F	V	V
Mohamed	Souad	F	V	V
Ali	Lilia	F	V	V
Lilia	Ali	F	V	V
Souad	Omar	F	V	V
Khadidja	Mohamed	F	V	V

$I \models \alpha$ (α valide)

$\beta = Couple(x,y) \rightarrow \exists z \, (Voisin(x,z) \wedge Voisin(z,y))$:

Formule non fermée.

x	y	$Couple(x,y)$	z	$\exists z \, (Voisin(x,z) \wedge Voisin(z,y))$	β
Omar	Lilia	V	$\nexists$	F	F
Ali	Souad	V	$\nexists$	F	F

$\Rightarrow I \not\models \beta$ Mais β est satisfaisable pour I pour toute autre valeur de x, y tq $Couple(x,y) = F$ (β non valide)

$\gamma = (\forall x \forall y \; Couple(x,y)) \wedge \forall x \, \neg ami(x,x) \rightarrow Voisin(x,y)$

Formule non fermée

occurrences libres

$\underbrace{\forall x \forall y \; Couple(x,y)}_{\text{Fausse}}$

$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{\forall x \forall y \; Couple(x,y) \wedge \forall x \, \neg Ami(x,x)}_{\text{Fausse}} \rightarrow Voisin(x,y)}$

vraie pour toute valuat° de x, y de la sous formule $Voisin(x,y)$

$\Rightarrow I \models \gamma$ (γ valide)

3/ $I(voisin) = \{$(Omar, Nawel), (Nawel, Mohamed), (Mohamed, Souad), (Souad, Khaled), (Nawel, Omar), (Mohamed, Nawel) (Souad, Mohamed), (Khaled, Souad)$\}$