USTH-FEI-Département d'Informatique 2015-2016

2ème année Licence **Examen Logique Mathématique**

Exercice 1 6pts(1,5-1,5-1,5-1,5)

Montrer les déductions suivantes dans le système déductif $L(\forall, \neg, \wedge, \rightarrow)$ avec $\alpha \vee \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$:

1. $\vdash ((P\rightarrow Q)\vee(P\rightarrow R))\rightarrow(P\rightarrow(Q\vee R))$
2. $\vdash \neg(\neg P\vee Q) \vee (P\rightarrow Q)$
3. $\exists x\,(P(x)\vee Q(x)) \vdash \exists x\, P(x) \vee \exists x Q(x)$
4. $\forall x\, \exists y\, P(x,y),\ \forall x\, \forall y\, \forall z(P(x,y)\rightarrow R(x,z)) \vdash \forall x\, \exists y\, R(x,y)$

Remarque: Ne pas transformer le connecteur "$\rightarrow$" dans le système "$\neg, \wedge$"

Exercice 2 7,5pts(1-2-1,5-1-2)

On s'intéresse à des formules propositionnelles formées à l'aide du connecteur «ou-exlusif » noté $\oplus$. On rappelle que $A \oplus B =_{def} (A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)$.

1. Donner la table de vérité du connecteur $\oplus$.
2. Montrer l'équivalence suivante sans utiliser les tables de vérité :
   $A\oplus B \equiv (A \leftrightarrow \neg B)$
3. Soient $A_1, \ldots, A_n$ n variables propositionnelles et $\alpha_n = A_1\oplus \ldots \oplus A_n$ une formule ($n\geq 1$).
   Montrer (par récurrence) que la formule α_n est vraie pour une instanciation si et seulement si le nombre de variables propositionnelles A_i ($1\leq i\leq n$) ayant la valeur de vérité vraie dans cette instanciation est impair. Notons que le connecteur $\oplus$ est associatif.
4. Donner les clauses du connecteur $\oplus$.
5. Montrer que le connecteur $\oplus$ est commutatif en utilisant l'algorithme de réfutation modifié.

Exercice 3 6,5pts (2pts(1/2-1/2-1)-4,5pts(1,5-1,5-1,5))

Soit la situation suivante :

- Il y a cinq individus : Amel, Brahim, Chafik, Dalila et Karim.
- Amel et Dalila sont des filles; Brahim, Chafik et Karim sont des garçons.
- Amel et Brahim ont chacun un chat ; Chafik et Dalila ont chacun un chien.
- Amel et Chafik promènent leur animal de compagnie (qui est soit un chien ou un chat).
- Amel est la sœur de Brahim et Karim; Dalila est la sœur de Chafik.

On note que ce qui n'est pas précisé est faux ; par exemple, Brahim ne fait pas promener son chien.

De cette situation, nous définissons l'interprétation I suivante :

- Le domaine D = {Amel, Brahim, Chafik, Dalila, Karim}
- Les constantes : a et b sont telles que : I(a) = Amel et I(b) = Brahim
- Les Prédicats : F, G, C, D et P monaires et S binaires sont tels que :

F(x) : x est une fille,
G(x) : x est un garçon,
C(x) : x a un chat,
D(x) : x a un chien
P(x) : x promène son animal de compagnie,
S(x, y) : x est la sœur de y,
Par exemple, on a I(F) = {Amel, Dalila}.

1) Formalisez les phrases ci-dessous dans le langage des prédicats
   a) Aucune fille n'a un chien.
   b) Certains garçons n'ont ni chien ni chat.
   c) Tous ceux qui ont un chien ont une sœur qui a un chat.

2) Etudier la satisfaisabilité ou la validité des formules suivantes
   a) $S(a, b) \wedge P(a) \rightarrow P(b)$
   b) $\forall x\, (G(x) \rightarrow D(x)) \rightarrow \forall x\, (F(x) \rightarrow C(x))$
   c) $G(x) \rightarrow \exists y\, S(y, x) \wedge D(y)$

Bon Courage

1

Ex 1

1/ $\vdash ((P \to Q) \vee (P \to R)) \to (P \to (Q \vee R))$

$\Leftrightarrow \vdash \neg(\neg(P \to Q) \wedge \neg(P \to R)) \to (P \to \neg(\neg Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(P \to Q) \wedge \neg(P \to R)) \vdash P \to \neg(\neg Q \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(P \to Q) \wedge \neg(P \to R)), P \vdash \neg(\neg Q \wedge \neg R)$

$$\dfrac{P \to Q^{(1)} \quad P}{Q}(E\to) \qquad \dfrac{\neg Q \wedge \neg R^{(3)}}{\neg Q \quad \neg R}(E\wedge) \qquad \dfrac{P \to R^{(2)} \quad P}{R}(E\to)$$

$$\dfrac{\dfrac{Q \quad \neg Q}{\perp}}{\neg(P \to Q)}(I\neg)^{(1)} \qquad \dfrac{\dfrac{R \quad \neg R}{\perp}}{\neg(P \to R)}(I\neg)^{(2)}$$

$$\dfrac{\neg(P \to Q) \quad \neg(P \to R)}{\neg(P \to Q) \wedge \neg(P \to R)}(I\wedge)$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\neg(P \to Q) \wedge \neg(P \to R)) \quad \neg(P \to Q) \wedge \neg(P \to R)}{\perp}}{\neg(\neg Q \wedge \neg R)}(I\neg)^{(3)}$$

1,5

2/ $\vdash \neg(\neg P \vee Q) \vee (P \to Q) \Leftrightarrow \vdash \neg(\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(P \to Q))$

$$\dfrac{\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(P \to Q)^{(3)}}{\neg(P \to Q) \qquad \neg(P \wedge \neg Q)}(E\wedge)\ \text{2 fois} \qquad \dfrac{P^{(2)} \quad \neg Q^{(1)}}{P \wedge \neg Q}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(P \wedge \neg Q) \quad P \wedge \neg Q}{\perp}}{\neg\neg Q}(I\neg)^{(1)}}{Q}(E\neg)$$

$$\dfrac{Q}{P \to Q}(I\to)^{(2)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg(P \to Q) \quad P \to Q}{\perp}}{\neg(\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(P \to Q))}(I\neg)^{(3)}$$

1,5

Ex1 (Suite)

3/ $\exists x \left(P(x) \vee Q(x)\right) \vdash \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$

$\iff \neg \forall x\, \neg \left(P(x) \vee Q(x)\right) \vdash \neg \forall x\, \neg \left(P(x) \vee \neg \forall x\, \neg Q(x)\right)$

$\iff \neg \forall x \left(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)\right) \vdash \neg \forall x \left(\neg P(x) \wedge \forall x\, \neg Q(x)\right)$

$\neg \forall x \left(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)\right)$

$\forall x \left(\neg P(x) \wedge \forall x\, \neg Q(x)\right)$

(E∀) x libre pour x ds

$\neg P(x) \wedge \forall x\, \neg Q(x)$

(E∧) 2X $\neg P(x) \wedge \forall x\, \neg Q(x)$

$\neg P(x) \qquad \forall x\, \neg Q(x)$

(E∀) x libre pour x ds $\neg Q(x)$

$\neg Q(x)$

(I∧)

$\neg P(x) \wedge \neg Q(x)$

(I∀) x non libre ds la prémisse

$\forall x \left(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)\right)$

$\wedge, 5$

$\perp$

(I¬)

$\neg \forall x \left(\neg P(x) \wedge \forall x\, \neg Q(x)\right)$

4/ $\forall x\, \exists y\; P(x,y),\ \forall x\, \forall y\, \forall z \left(P(x,y) \to R(x,y)\right) \vdash \forall x\, \exists y\, R(x,y)$

$\iff \forall x\, \neg \forall y\, \neg P(x,y),\ \forall x\, \forall y\, \forall z \left(P(x,y) \to R(x,y)\right) \vdash \forall x\, \neg \forall y\, \neg R(x,y)$

$$\dfrac{\forall x\, \neg \forall y\, \neg P(x,y)}{\neg \forall y\, \neg P(x,y)}\ (E\forall)$$

$P(x,y)$ ①

$$\dfrac{\forall x\, \forall y\, \forall z\, (P(x,y) \to R(x,z))}{\forall y\, \forall z\, (P(x,y) \to R(x,z))}\ (E\forall)\ \text{x libre pour x}$$

$$\dfrac{\forall y\, \forall z\, (P(x,y) \to R(x,z))}{\forall z\, (P(x,y) \to R(x,z))}\ (E\forall)\ \text{y libre pour y}$$

$$\dfrac{\forall z\, (P(x,y) \to R(x,z))}{P(x,y) \to R(x,y)}\ (E\forall)\ \text{y libre pour z ds la formule}$$

$$\dfrac{P(x,y) \qquad P(x,y) \to R(x,y)}{R(x,y)}\ (E\to)$$

$$\dfrac{\forall y\, \neg R(x,y)}{\neg R(x,y)}$$ ②

$$\dfrac{R(x,y) \qquad \neg R(x,y)}{\bot}$$

$$\dfrac{\bot}{\neg P(x,y)}\ (I\neg)\ ①$$

$$\dfrac{\neg P(x,y)}{\forall y\, \neg P(x,y)}\ (I\forall)\ \text{y non libre ds les premisses}$$

$$\dfrac{\neg \forall y\, \neg P(x,y) \qquad \forall y\, \neg P(x,y)}{\bot}$$

$$\dfrac{\bot}{\neg \forall y\, \neg R(x,y)}\ (I\neg)\ ②$$

$$\dfrac{\neg \forall y\, \neg R(x,y)}{\forall x\, \neg \forall y\, \neg R(x,y)}\ (I\forall)\ \text{x non libre ds les premisses}$$

1,5

4

Ex2 $A \oplus B =_{def} (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

1/

	A	B	$A \oplus B$
L_1	V	V	F
L_2	V	F	V
L_3	F	V	V
L_4	F	F	F

1,00

2/ $A \oplus B \overset{?}{\equiv} A \leftrightarrow \neg B$

$$
\begin{aligned}
A \leftrightarrow \neg B &\equiv (A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg B \rightarrow A) \\
&\equiv \neg(A \wedge \neg\neg B) \wedge \neg(\neg B \wedge \neg A) \\
&\equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge (B \vee A) \\
&\equiv (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge A) \vee (\neg B \wedge B) \vee (\neg B \wedge A) \\
&\equiv (\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge A) \\
&\equiv A \oplus B
\end{aligned}
$$

1,5

3/ $\alpha_n = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots + A_n$ vraie pour une instanciation

SSI $\Longleftrightarrow$ le nb de variables vraies pour cette instanciation est impair.

$n = 2$:

$\alpha_2 = A_1 \oplus A_2$ est vraie pour les deux lignes L_2 et L_3

dans les deux lignes, une des variables est vraie $\Leftrightarrow$ nombre impair de variables vraies.

Cas general

On suppose la propriété vraie pour n et on montre pour n+1 :

5

$\alpha_{n+1} = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n \oplus A_{n+1}$ vraie pour une instanciat°

$\Leftrightarrow \alpha_{n+1} = (A_1 \oplus A_2 + \cdots + A_n) \oplus A_{n+1}$ "

$\Leftrightarrow \alpha_{n+1} = \left((A_1 \oplus \cdots \oplus A_n) \wedge \neg A_{n+1}\right) \vee \left(\neg(A_1 \oplus \cdots \oplus A_n) \wedge A_{n+1}\right)$

vraie pour une instanciat°

$\Leftrightarrow \begin{cases} (A_1 \oplus \cdots \oplus A_n) \wedge \neg A_{n+1} \text{ vraie pour une instanciat°} \\ \text{ou} \\ \neg(A_1 \oplus \cdots \oplus A_n) \wedge A_{n+1} \quad \text{"} \end{cases}$

5

$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \text{ vraie pour une instanciat° et } \neg A_{n+1} \text{ vraie} \\ \neg(A_1 \oplus \cdots \oplus A_n) \text{ vraie } \quad \text{" et } A_{n+1} \text{ vraie} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \text{ vraie pour une instanciat° et } A_{n+1} \text{ fausse} \\ (A_1 \oplus \cdots \oplus A_n) \text{ fausse et } A_{n+1} \text{ vraie} \end{cases}$

$\overset{H.R}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{nb de var. vraies pour cette instanc.} = \text{nb des var. vraies parmi } A_1, \dots, A_n \text{ qui est impair} + 0 \\ \text{nb de var. vraies pour cette instanc.} = \text{nb de vraies parmi } A_1, \dots, A_n \text{ qui n'est pas impair} + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ nb de var. prop. vraies est impair

4/ Les clauses du $\oplus$:

$\Gamma = \Sigma \cup \{\alpha \oplus \beta\} = \Sigma \cup \{(\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)\}$

$= \Sigma \cup \{\neg(\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\neg\alpha \wedge \beta))\}$

0,5

$\Sigma \cup \{\alpha \wedge \neg\beta\}$ $\qquad$ $\Sigma \cup \{\neg\alpha \wedge \beta\}$

$\Sigma \cup \{\alpha, \neg\beta\}$ $\qquad$ $\Sigma \cup \{\neg\alpha, \beta\}$

Ex2 (Suite)

4/ $$\Gamma = \Sigma \cup \{\neg(\alpha \oplus \beta)\} = \Sigma \cup \{\neg((\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta))\}$$

$$= \Sigma \cup \{\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\neg\alpha \wedge \beta)\}$$

$$\downarrow$$

$$\Sigma \cup \{\neg(\alpha \wedge \neg\beta), \neg(\neg\alpha \wedge \beta)\}$$

$$\Sigma \cup \{\neg\alpha, \neg(\neg\alpha \wedge \beta)\} \qquad \{\neg\neg\beta, \neg(\neg\alpha \wedge \beta)\} \cup \Sigma$$

0,5

$$\Sigma \cup \{\neg\alpha, \neg\neg\alpha\} \qquad \Sigma \cup \{\neg\alpha, \neg\beta\} \qquad \Sigma \cup \{\beta, \neg\neg\alpha\} \qquad \Sigma \cup \{\beta, \neg\beta\}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\Sigma \cup \{\neg\alpha, \alpha\} \qquad \Sigma \cup \{\neg\alpha, \neg\beta\} \qquad \Sigma \cup \{\beta, \alpha\} \qquad \Sigma \cup \{\beta, \neg\beta\}$$

$$\bot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \bot$$

5/ $\oplus$ est commutatif ssi $\vdash (\alpha \oplus \beta) \leftrightarrow (\beta \oplus \alpha)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \oplus \beta \vdash \beta \oplus \alpha \\ \text{et } \beta \oplus \alpha \vdash \alpha \oplus \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \{\alpha \oplus \beta, \neg(\beta \oplus \alpha)\} \text{ inconsistant}$$

$$\Gamma = \{\alpha \oplus \beta, \neg(\beta \oplus \alpha)\}$$

$$\{\alpha, \neg\beta, \neg(\beta \oplus \alpha)\} \qquad \{\neg\alpha, \beta, \neg(\beta \oplus \alpha)\}$$

$$\Gamma_1 = \{\alpha, \neg\beta, \beta, \alpha\} \quad \Gamma_2 = \{\alpha, \neg\beta, \neg\beta, \neg\alpha\} \quad \Gamma_3 = \{\neg\alpha, \beta, \beta, \alpha\} \quad \{\neg\alpha, \beta, \neg\beta, \neg\alpha\} = \Gamma_4$$

Γ_1 inconsistant
Γ_2 "
Γ_3 "
Γ_4 "
$\Rightarrow \Gamma$ inconsistant.

9,00

$$\Rightarrow \alpha \oplus \beta \vdash \cancel{\neg}(\beta \oplus \alpha) \quad (1)$$

$$\Gamma' = \{\neg(\alpha \oplus \beta), \beta \oplus \alpha\}$$

$$\{\alpha, \beta, \beta \oplus \alpha\} \qquad \{\neg\beta, \neg\alpha, \beta \oplus \alpha\}$$

$$\Gamma'_1 = \{\alpha, \beta, \beta, \neg\alpha\} \quad \Gamma'_2 = \{\alpha, \beta, \neg\beta, \alpha\} \quad \Gamma'_3 = \{\neg\alpha, \neg\beta, \beta, \alpha\} \quad \Gamma'_4 = \{\neg\alpha, \neg\beta, \neg\beta, \alpha\}$$

Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3 et Γ'_4 inconsistant $\Rightarrow \Gamma'$ inconsistant

$$\Rightarrow \beta \oplus \alpha \vdash \alpha \oplus \beta \quad (2)$$

de (1) et (2) on a: $\vdash \alpha \oplus \beta \leftrightarrow \beta \oplus \alpha$

8

EX 3

Amel sœur de Brahim et Karim

Dalila sœur de Chafik

Amel a un chat (le promène)

Brahim a "

Chafik a un chien (")

Dalila a un chien

$I(a) = \text{Amel}$

$I(b) = \text{Brahim}$

1/ a/ Aucune fille n'a un chien

$\forall x \, (F(x) \rightarrow \neg D(x))$ 1,00

b/ Certains garçons n'ont ni chien ni chat

$\exists x \, (G(x) \wedge \neg C(x) \wedge \neg D(x))$ 1,00

c/ Tous ceux qui ont un chien ont une sœur qui a un chat

1,00

$\forall x \, (D(x) \rightarrow \exists y \; F(y) \wedge S(x,y) \wedge C(y))$

2/ a/ $S(a,b) \wedge P(a) \rightarrow P(b) = \alpha_1$

$I(\alpha_1) =$ Si Amel est sœur de Brahim et si elle promène son chat Alors Brahim promène son chat aussi

comme Amel est sœur de Brahim et qu'elle fait promener son chat alors que Brahim ne fait pas promener son chat.

Donc $I(\alpha_1) =$ fausse 1,25

$I \not\models \alpha_1$

EX3 (Suite)

2/b/ $\forall x\,(G(x) \to D(x)) \to \forall x\,(F(x) \to C(x))$ Formule fermée

$= \alpha_2$

$I(\alpha_2)$ = Si qlq $d_1 \in D$ tq tout garçon d_1 a un chien

Alors $\forall\, d_2 \in D$ tq si d_2 est une fille alors elle a un chat

du $I(\alpha_2)$ = Si tout garçon a un chien Alors toute fille a un chat

$F \longrightarrow F$

exple Brahim est un garçon qui n'a pas de chien

Dalila une fille qui n'a pas de chat

1,25

$I(\alpha_2)$ = Vraie

$I \models \alpha_2$

c/ $\alpha_3 = G(x) \to \exists y\; S(y,x) \wedge D(y)$ formule non fermée

$I(\alpha_3)$ = Si V_x est un garçon alors Il existe $d \in D$ tq d est soeur de V_x et d a un chien

mais Brahim est un garçon alors qu'il n'a pas de soeur qui a un chien $\Rightarrow I \not\models \alpha_3\,[x = \text{Brahim}]$

$\Rightarrow I \models \alpha_3$

mais $I \models \alpha_3\,[x = \text{Chatik}]$

1,5

$I \not\models \alpha_3\,[x = \text{Karim}]$

$I \models \alpha_3\,[\text{Amel}]$

$I \models \alpha_3\,[\text{Dalila}]$