Examen Logique Mathématique

Exercice 1

1. Montrer que : $(\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow (\ldots\ldots(\alpha_n \rightarrow \alpha)\ldots)))$ est vrai ssi il existe i (i=1,…, n) tel que α_i est Faux ou α est vrai (*Indication par récurrence*)
2. Déduire que $\models (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots\ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \alpha$ ssi $\models (\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow (\ldots\ldots(\alpha_n \rightarrow \alpha)\ldots)))$
3. Montrer l'équivalence suivante sans utiliser les tables de vérité :
   $(P \leftrightarrow \neg Q) \equiv \neg(Q \leftrightarrow P)$
4. Donner les clauses de l'algorithme de réfutation du connecteur $\rightarrow$
5. Montrer la déduction suivante en utilisant l'algorithme de réfutation :
   $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Exercice 2

Montrer les déductions suivantes dans le système déductif $L(\forall, \neg, \wedge, \rightarrow)$:

a. $(P \vee Q) \rightarrow R, Q \vdash R \vee S$
b. $\vdash (P \wedge (P \vee Q)) \leftrightarrow P$
c. $P \vee (Q \wedge R) \vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
d. $\exists x\, P(x), \forall x \forall y\, (P(x) \rightarrow Q(x,y)) \vdash \exists x \forall y\, Q(x,y)$
e. $\forall x\, (Q(x) \vee R(x) \rightarrow P(x)), \forall x (Q(x) \vee T(x)), \neg T(a) \vdash P(a)$

Rappel : $\alpha \vee \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$.

Exercice 3

Soit le langage L comprenant :

- Trois (3) symboles de constante a, b, c, d ;
- Des symboles de prédicats unaires S,*CN*, *CT*, *D*,*LV*, *LP* et LN*et* d'un prédicat binaire *R*.

Soit une interprétation I de domaine D représentant les animaux d'un cirque qui comporte 3 chiens dont un lévrier, 4 chats, 2 lions et 2 loups. Les vedettes de ce cirque sont le chat Ketty, le chien Milou, le lion Simba et le loup Rufus. L'interprétation I est définie par :

I(a)=Milou ; **I(b)**=Kitty; I(c)=Simba; I(d)=Rufus ; **I(S) (x)** : « x est un animal Sauvage » ; **I(D) (x)** : « x est un animal Domestique »; **I(R)**(x, y) : « x est plus rapide que y » ;**I(LV)**(x) : « x est un Lévrier » ; **I(LN)** (x) : « x est un lion » ; I(CN) (x) : « x est un chien » ; **I(CT)** (x) : « x est un chat » ; **I(LP)**= « x est un Loup ».

On considère qu'un animal sauvage est plus rapide qu'un animal domestiquesauf le lévrier.
lévrier plus rapide qu'un sauvage

Q1/ Formaliser les phrases suivantes en logique des prédicats

a. Milou est un chien, Kitty est un chat, Simba est un lion et Rufus est un Loup.
b. Tout lévrier est un chien.
c. Tous les chiens sauf le lévrier sont moins rapides que les loups.

Q2/ Etudier la satisfiabilité ou la validité des formules suivantes en justifiant vos réponses:

a. $\forall x\ R(x, c)$
b. $\exists x\, (LN(x) \wedge \forall y\, (CT(y) \rightarrow R(x, y)))$
c. $S(x) \rightarrow \forall y\, (D(y) \wedge \neg LV(y) \rightarrow R(x, y))$
d. $D(x) \rightarrow \exists y (S(y) \wedge R(y, x))$

Bon Courage