Examen de logique mathématique

Exercice 1 : **8points**

Soit $\Im$ le langage propositionnel ne contenant que les connecteurs « $\neg$ », « $\rightarrow$ » et « $\leftarrow$ ». On définit le connecteur « $\leftarrow$ » par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \leftarrow Q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

1/ Montrer que : a) $\neg(P \rightarrow Q) \equiv \neg P \leftarrow \neg Q$ b) $\neg (P \leftarrow Q) \equiv \neg P \rightarrow \neg Q$

2 / Etant donné une formule Γ du langage $\Im$, on note :

« $\Gamma^{\#}$ » la formule obtenue à partir de Γ en inter changeant « $\rightarrow$ » et « $\leftarrow$ ».

« Γ^{+} » la formule obtenue à partir de Γ en remplaçant chaque variable propositionnelle par sa négation.

a. Montrer que $\neg\Gamma \equiv (\Gamma^{\#})^{+}$ quelque soit Γ.
b. En déduire la négation de la formule suivante et la simplifier $(\neg A \rightarrow \neg B) \leftarrow \neg(C \rightarrow D)$.
c. Compléter l'algorithme de réfutation pour introduire les clauses correspondantes à $\rightarrow$ et $\leftarrow$.
d. Montrer la déduction suivante en utilisant l'algorithme de réfutation modifié :

$$\vdash \neg (B \leftarrow A) \rightarrow \neg (\neg(\neg B \rightarrow A) \leftarrow \neg B).$$

Exercice 2 : 6 points

Soit L ($\neg$, $\leftrightarrow$, $\forall$) un langage du premier ordre où les règles d'élimination et d'introduction de $\leftrightarrow$ sont données ci-dessous. Pour le connecteur $\neg$ et le quantificateur universel $\forall$, les règles d'élimination et d'introduction sont celles vues en cours.

On notera $\Vdash$ la déduction dans le système L ($\neg$, $\leftrightarrow$, $\forall$).

$$\frac{\alpha\leftrightarrow\beta \quad \alpha}{\beta}\ (E\leftrightarrow) \qquad \frac{\alpha\leftrightarrow\beta \quad \beta}{\alpha}\ (E\leftrightarrow) \qquad \frac{\begin{matrix}[\cancel{\alpha}] & [\cancel{\beta}] \\ \vdots & \vdots \\ \beta & \alpha\end{matrix}}{\alpha\leftrightarrow\beta}\ (I\leftrightarrow)$$

Montrer les déductions suivantes :

1. $\alpha\leftrightarrow\beta, \neg\alpha \Vdash \neg\beta$
2. $\alpha\leftrightarrow\beta \Vdash \neg\alpha\leftrightarrow\neg\beta$
3. $\forall x\, (\alpha(x)\leftrightarrow\beta(x)), \exists x\, \alpha(x) \Vdash \exists x\, \beta(x)$
4. $\forall x\, \forall y\, (P(x, y) \leftrightarrow R(y, x)),\ \forall x\, \forall y\, (R(y, y)\leftrightarrow Q(y, x)) \Vdash \forall x\, (P(x, x)\leftrightarrow Q(x, x))$

Exercice 3 : 6points

Soit L le langage des prédicats contenant quatre symboles de constante a, b, v et r, deux symboles de prédicats unaires P et S, un symbole de prédicats binaire R et un symbole de fonction unaire f. On définit l'interprétation I de domaine D= O $\cup$ C tels que :

O = {o1, o2, o3, o4, o5, o6} l'ensemble des objets et C = {Rouge, Vert, Bleu} l'ensemble des couleurs ;

I(a) = o1, I(b)=Bleu, I(v)=Vert, I(r) = Rouge ;

I(f) = Ψ : O $\rightarrow$ C avec Ψ(o1)= Ψ(o3) =Ψ(o4)=Rouge, Ψ(o2)=Bleu et Ψ(o5)= Ψ (o6)=Vert ;

I(P), I(S) et I(R) désignent respectivement les relations "est un cube", "est une sphère" et "est à côté de » avec I(P)={o1, o2, o3}, I(S)={o4, o5, o6} et I(R)={(o1, o6), (o6, o1), (o1, o3), (o3, o1), (o3, o4), (o4, o3), (o4, o5), (o5, o4)}.

Etudier pour I la satifaisabilité et/ou la validité des formules suivantes :

1. $\alpha = \exists x\, (S(x) \wedge f(x)=b)$ 2. $\beta = R(x, a) \rightarrow (P(x) \wedge f(x) = r)$ 3. $\delta = \forall x\, (P(x) \rightarrow \exists y\, R(x, y))$