USTHB | Examen de Logique Mathématique | 10/01/2012

Département Informatique

***Exercice 1 :*** (1.5, 1, 1.5)

Soient des formules $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ et $\alpha$. On dira que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ impliquent sémantiquement $\alpha$ et on notera $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n \mid== \alpha$ si toute instanciation qui donne la valeur VRAI aux formules $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ donne aussi la valeur VRAI à $\alpha$.

Q1/ Montrer en utilisant les tables de vérité que : $\neg A \vee B,\ C \vee \neg B \mid== \neg A \vee C$.

Q2/ Quelle relation y a-t-il entre $\equiv$ et $\mid==$ ?

Q3/ Donner un exemple de deux ensembles de formules $\Gamma$ et $\Sigma$ et d'une formule $\alpha$ pour montrer que si $\Gamma$ inclus dans $\Sigma$ et $\Sigma \mid== \alpha$ n'implique pas $\Gamma \mid== \alpha$.

***Exercice 2 :*** (1.5, 2, 2.5)

Q1/ Exprimer la formule suivante $\alpha$: $(P \wedge Q) \vee R \vee (\neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg R)$ dans le langage $L(\neg, \wedge)$. Soit $\beta$ la formule obtenue.

Q2/ Montrer en utilisant les déductions que $\beta$ est une tautologie.

Q3/ Appliquer l'algorithme de réfutation pour montrer $\vdash \alpha$ en rappelant les clauses des connecteurs «$\wedge$ » et «$\vee$ ».

***Exercice 3 :*** (2.5, 2)

Démonter les déductions suivantes dans le langage $L_1(\neg, \rightarrow, \forall)$ **ou** le langage $L_2(\neg, \wedge, \forall)$:

1. $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x)) \vdash \forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))$
2. $\forall x\, P(x,a),\ \exists y\, P(b,y) \rightarrow \forall z\, Q(z) \vdash \exists z\, Q(z)$

***Rappel :*** Les Règles de l'Implication matérielle $\rightarrow$ :

1. Si $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ Alors $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ $(I\rightarrow)$
2. $\alpha,\ \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$ $(E\rightarrow)$

***Exercice 4 :*** ( 1.5, 2, 2.5)

Soit L le langage de 1$^{\text{er}}$ ordre contenant deux symboles de constantes a et b, un symbole de fonction binaire f et trois symboles de prédicat monaires P, Q et R. On définit pour L l'interprétation I suivante de Domaine $D = E \cup M \cup N$ tels que :

E ={Mohamed, Souad) l'ensemble des étudiants, M ={Algèbre, Analyse, Logique } l'ensemble des modules et N = {0,1, 2, …, 18, 19, 20} l'ensemble des moyennes possibles;

I(a) = Mohamed, I(b) = Analyse,

$I(f) = \psi$ avec $\psi : E \times M \rightarrow N$ donnée par le tableau ci-dessous

I(Q), I(R) et I(P) désignent respectivement les relations « est un étudiant », « est un module » et « supérieure ou égale à 10 ».

| Etudiant\Module | Algèbre | Analyse | Logique |
|---|---|---|---|
| Mohamed | 12 | 5 | 16 |
| Souad | 14 | 15 | 7 |

1. Modéliser les énoncés suivants dans le langage L (en tenant compte de l'interprétation I) définis ci-dessus :

a) Mohamed a obtenu la moyenne à tous les modules ;
b) Aucun étudiant n'a eu de moyenne au module d'analyse ;
c) Tous les étudiants ont eu la moyenne au module d'analyse.

2. Soient les formules suivantes :

$\alpha_1$: $P(f(a, b))$ $\qquad$ $\alpha_2$: $\exists x\,(Q(x) \wedge \neg P(f(x,b)))$ $\qquad$ $\alpha_3$: $\forall x\, \forall y\,(Q(x) \wedge R(y) \rightarrow P(f(x, y)))$

a) Pour l'interprétation I, exprimer en langage naturel les formules $\alpha_1$, $\alpha_2$ et $\alpha_3$.
b) Etudier pour I la satisfiabilité et/ou la validité des formules ci-dessus.

Bon courage