EXERCICE I 8pts (2-2- 1-1-2)

Soit les faits suivants :

- Si Ali est en forme, alors on joue au ballon ;
- Si Ali et Omar sont en forme, alors il y a de la tension sur le terrain ;
- Si on ne joue pas au ballon, alors il n'y a pas de tension sur le terrain ;
- Ali n'est pas en forme.

Soient le système déductif L $(\neg,\wedge,\rightarrow)$ et les variables propositionnelles A, O, B et T qui représentent respectivement (Ali est en forme, Omar est en forme, On joue au ballon, Il y a de la tension sur le terrain).

1. Exprimer sous forme de formules α_1, α_2, α_3 et α_4 les faits ci-dessus.
2. Représenter les quatre formules dans une même table de vérité.
3. L'ensemble $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ est il satisfaisable ? Si oui, peut-on conclure, à partir de la table de vérité, qu'il y aura de la tension sur le terrain ?
4. Rappeler les clauses correspondant à $\rightarrow$.
5. Appliquer l'algorithme de réfutation modifié pour **vérifier si la déduction suivante est démontrable :**

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \vdash \neg T.$$

EXERCICE II 7 pts (1,5-1,5-2-2)

Soit L $(\neg, \leftarrow, \forall)$ un langage du premier ordre où $\leftarrow$ est un nouveau connecteur auquel on associe les règles d'élimination et d'introduction ci-dessous. Pour le connecteur $\neg$ et le quantificateur universel $\forall$, les règles d'élimination et d'introduction sont celles vues en cours.

$$\frac{\alpha\leftarrow\beta}{\alpha}\ (E\leftarrow) \qquad \frac{\alpha\leftarrow\beta}{\neg\beta}\ (E\leftarrow) \qquad \frac{\alpha \quad \neg\beta}{\alpha\leftarrow\beta}\ (I\leftarrow)$$

On notera $\Vdash$ la déduction dans le système $(\neg, \leftarrow, \forall)$ en considérant les définitions suivantes : $\alpha\vee\beta =_{def} \neg(\neg\alpha\leftarrow\beta)$ et $\exists x\, \alpha(x) =_{def} \neg\forall x\, \neg\alpha(x)$. On suppose que $\alpha \Vdash \neg\neg\alpha$.

Montrer :

1. $\alpha \leftarrow \beta, \neg\alpha \Vdash \beta$
2. $\alpha \Vdash \beta \Rightarrow\ \Vdash \neg(\alpha\leftarrow\beta)$
3. $\neg\alpha\vee\neg(\beta\leftarrow\delta),\ \neg\alpha\vee\beta \Vdash \neg(\alpha\leftarrow\delta)$
4. $\forall x\ (\alpha(x) \vee \beta(x)), \exists x \neg\alpha(x) \Vdash \exists x\ \beta(x)$

EXERCICE III 5pts (1,5-1,5-2)

Soit L un langage de 1er ordre avec égalité contenant deux symboles de prédicats binaire P et Q et f un symbole de fonction d'arité 1. Soit I une interprétation de domaine D = {Algérie, Maroc, Mauritanie, Tunisie, Libye, Sahara Occidentale}, représentant les pays du Maghreb. Dans la suite, on désignera chaque pays par ses trois premières lettres en majuscules. L'interprétation I est telle que :

- $I(P)=\{(x, y) /\ x \text{ est voisin de } y\}$ (Voir figure ci-dessous) et $I(Q)=$ « $\leq$ »
- $I(f)(x)$ donne la superficie du pays x telle que :
  $I(f)(ALG)=2\,381\,741\ km^2$, $I(f)(MAR)=446\,550\ km^2$, $I(f)(MAU)=1\,030\,700$ km2, $I(f)(TUN)= 163\,610\ km^2$, $I(f)(LIB)= 1\,759\,540\ km^2$ et $I(f)(SAH)= 266\,000 km^2$.

Etudier la satisfaisabilité et validité de :

1. $\alpha = \exists x\ (\forall y\ \neg(x=y)\rightarrow P(x,y))$
2. $\beta = P(x, y) \rightarrow Q(f(x), f(y))$
3. $\delta = P(x, y) \rightarrow \exists z\ (P(x,z) \wedge P(z, y))$