Faculté d'Electronique er d'Informatique
Département d'Informatique
L2: ACAD(B,C) et ISIL(B)

USTHB : 17/01/19

**Examen final de moyenne durée**

**EXERCICE 1:** On considère l'équation : $f(x) = e^{-x} - x^2 = 0$.

1) Montrer que l'équation donnée admet une unique racine $\alpha$. Localiser la entre deux entiers consécutifs.
2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente aux équations :
$$\begin{cases} \phi(x) = x - e^{-x} + x^2 = x. \\ \varphi(x) = e^{-x/2} = x. \end{cases}$$
3) Vérifier les hypothèses du théorème du point fixe pour $\varphi$ et $\phi$.
4) Donner la suite de Newton associée à la fonction $f$ et étudier sa convergence.
5) Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour approcher la racine $\alpha$ à $10^{-2}$ près $(x_0 = 1)$ par chacune des deux méthodes.

**EXERCICE 2:** Soit $A$ une matrice carrée d'ordre 3.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} \beta \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $(\alpha, \beta) \in R^2$.

a) Pour quelles valeurs de $\alpha$ peut-on décomposer $A$ en $LU$ ?. Pour ces valeurs trouvées, donner cette décomposition.
b) Pour quelles valeurs de $\alpha$ et de $\beta$ ce système admet-il une unique solution.

**EXERCICE 3:** Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in R$.

1) Pour quelles valeurs de $\alpha$, la matrice $A$ admet-elle la décomposition de Cholesky.
2) Pour quelles valeurs de $\alpha$, les itérations de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent-elles $\forall x_0 \in R^3$ ?.
3) Calculer $\|J\|_1$ *et* $\|J\|_\infty$. Donner les domaines de convergence de la méthode de Jacobi en utilisant ces valeurs.
4) Commenter les résultats obtenus en ~~1) et 2)~~ 2 et 3
5) Pour $\alpha = 1/2$, calculer $X^{(1)}$ *et* $X^{(2)}$ par la méthode Jacobi sachant que $X^{(0)} = {}^t(0,0,0)$ et donner une estimation de l'erreur commise.
6) Déterminer la solution exacte du système $A.X = b$ par Cholesky et évaluer l'erreur réelle.

6) (≤ 1)

*Bon courage*

$f^{(3)}(x) = -e^{-x}$

$e^{0,6}$

$1 - 0,36 = 1,64$

| | |
|---|---|
| $f^{(3)}(x)$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-1 \longrightarrow -1$ |
| $f'(x)$ | $-1 \longrightarrow -e^{-1}-2$ |

**EXO 1 :** $f(x) = e^{-x} - x^2 = 0 \quad (1)$

1/ On a : $f'(x) = -e^{-x} - 2x$ et $f''(x) = e^{-x} - 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow -x = \ln 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$

$f'(-\ln 2) = -2 + 2\ln 2 \simeq -0.613$

D'après le T.V.I, $\exists !\ \alpha \in \mathbb{R}$ tq : $f(\alpha) = 0$.

On a : $f(0) = 1$ et $f(1) \simeq -0.63 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln 2 \simeq -0.69$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ (−) | $-0.613$ | $\searrow$ (−) | $-\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | | $\searrow$ | | $-\infty$ |

2/ $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = x^2 \Leftrightarrow x = \pm e^{-x/2}$, $\alpha > 0 \Rightarrow \boxed{x = e^{-x/2}}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = x \Leftrightarrow x - e^{-x} + x^2 = x \Rightarrow -e^{-x} + x^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{e^{-x} - x^2 = 0}$.

3/ Pour $\varphi(x) = x - e^{-x} + x^2$, on a : $\varphi(0) = -1 \notin [0,1]$.

$\varphi$ n'est pas stable.

Pour $\psi(x) = e^{-x/2}$, on a : $\psi'(x) = -\frac{1}{2} e^{-x/2}$ et $\psi''(x) = \frac{1}{4} e^{-x/2}$

Alors : $\psi([0,1]) = [e^{-1/2}, 1] \subset [0,1]$

et $\sup |\psi'(x)| = \frac{1}{2} < 1$.

D'où la c.v de la suite $x_{n+1} = \psi(x_n) \to \alpha$

| $x$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\psi''(x)$ | | $+$ | |
| $\psi'(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ (−) | $-\frac{1}{2}e^{-1/2} \simeq -0,30$ |
| $\psi(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $e^{-1/2}$ |

4/ La suite de Newton :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n^2}{-e^{-x_n} - 2x_n} = \frac{-2x_n^2 - x_n e^{-x_n} - e^{-x_n} + x_n^2}{-e^{-x_n} - 2x_n} = \frac{-x_n^2 - (x_n+1)e^{-x_n}}{-e^{-x_n} - 2x_n}$$

•) $f \in C^2([0,1])$, $f(0) \cdot f(1) < 0$ et $f'(x) \neq 0$ sur $[0,1]$.

•) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\ln 2 \notin [0,1] \Rightarrow f''$ garde un signe sur $[0,1]$ $(< 0)$

•) $\begin{cases} f'(0) = -1 \\ f'(1) = -e^{-1} - 2 \end{cases} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \left| \frac{f(0)}{f'(0)} \right| = 1 \leq 1 - 0$.

D'où la cv de la suite de Newton

$n \geq 6,32 \Rightarrow \boxed{n = 7}$

$x_1 = e^{-1/2} \simeq 0,606$

$|x_1 - x_0| \simeq 0,394$

5/ Par pt fixe : $\|x_n - \alpha\| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_0 - x_1| \leq 10^{-2} \Rightarrow$

- Newton : $\|x_{n+1} - \bar{x}\| \leq \frac{M}{2m} \|x_n - x_{n-1}\|^2$ où $\begin{cases} M = 2 - e^{-1} \simeq 1,63 \\ m = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow e_1 \simeq 0,0586$

$x_1 \simeq 0,7339$

EXO 2 .

1/ A se décompose en LU ssi : $\det(A_{[k]}) \neq 0, \forall k$.

(.) $\det(A_{[1]}) = 1 \neq 0, \forall \alpha$.

(.) $\det(A_{[2]}) = \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

(.) $\det(A_{[3]}) = 1(6\alpha - 3) + 3(2 - 3\alpha) = 6\alpha - 3 + 6 - 9\alpha = 3 - 3\alpha \Rightarrow \alpha \neq 1$.

D'où A se décompose en LU ssi $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. OK

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3-3\alpha}{\alpha} \end{pmatrix} = A^{(3)}$

D'où $U = A^{(3)}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3/\alpha & 1 \end{pmatrix}$.

3/ Ce système admet une sol unique ssi : $\det(A) \neq 0$

or $\det(A) = 3 - 3\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha \neq 1}$

Donc $\exists !$ sol pour $\alpha \neq 1$ i.e $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

EXO3 : 1/ A admet la décomposition de cholesky ssi : $^tA = A$ et A S.D.P

or $^tA = A, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

A S.P $\Leftrightarrow \begin{cases} \det(A_{[1]}) = 1 > 0, \forall \alpha \\ \det(A_{[2]}) = 2 > 0, \\ \det(A_{[3]}) = 1(6) + \alpha(-2\alpha) = 6 - 2\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \in ]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[ \end{cases}$

D'où $\alpha \in \Lambda = ]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

1

2/ i) l'itération de Jacobi cv ssi $\rho(J_A) < 1$.

on a : $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(J_A - \lambda . Id) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\alpha \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -\frac{\alpha}{3} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2) - \frac{\alpha}{3}(-\alpha\lambda)$

$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{\alpha^2}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$ et $\lambda_{2,3} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$

D'où $\rho(J_A) = \frac{|\alpha|}{\sqrt{3}}$.

$\rho(J_A) < 1 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{\sqrt{3}} < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < \sqrt{3}$ i.e $\alpha \in ]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

ii) Pour Gauss-Seidel, on a : $G_s = (D-E)^{-1}.F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -\frac{\alpha}{3} & 0 & 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$G_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2/3 \end{pmatrix}.$$

$$\det(G_s - \lambda . Id) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\alpha \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha^2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = +\lambda^2\left(\frac{\alpha^2}{3} - \lambda\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \text{et} \\ \lambda_3 = \alpha^2/3. \end{cases}$$

d'où $\rho(G_s)$ C.V ssi $\rho(G_s) = \frac{\alpha^2}{3} < 1$ i.e $\alpha \in ]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

3) $\|J_\alpha\|_1 = \max_j \{\sum_i (\ )\} = \max\{\frac{|\alpha|}{3}, 0, |\alpha|\} = |\alpha|$

et $\|J\|_\infty = \max_i \{\sum_j (\ )\} = \max\{|\alpha|, 0, \frac{|\alpha|}{3}\} = |\alpha|$

$$D_{C.V(\|\cdot\|_1)} = D_{C.V(\|\cdot\|_\infty)} = \{\alpha \in \mathbb{R} ; |\alpha| < 1 \text{ i.e } \alpha \in ]-1, 1[\}.$$

4) $D_{C.V(\rho)} \supset D_{C.V(\|\cdot\|_1)} = D_{C.V(\|\cdot\|_\infty)}$ car ne sont que des C.d suffit ms pas necessaire et $\rho$ = Cd Nd S

5) Pour : $\alpha = 1/2$, $J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D^{-1}.b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

Ce qui donne : $X^{(1)} = J_A . X^{(0)} + b' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $X^{(2)} = J_A . X^{(1)} + b'$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

$$\|X^{(2)} - \bar{X}\|_\nu \leq \frac{\|J_A\|^2}{1 - \|J_A\|} . \|X^{(0)} - X^{(1)}\|_{\nu(\nu)} = \begin{cases} \frac{1/4}{1/2} . \frac{1}{3} = \frac{1}{6} & (\text{Avec } \|\cdot\|_\infty) \\ 1/2 . = 1/6 & \simeq \|\cdot\|_1 \end{cases}$$

6) $A = {}^tR . R$ où $R = D^{1/2}.L$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{11}}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{11}/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11/4 \end{pmatrix}; \quad AX = b \Leftrightarrow {}^tR\, R.X = b \Leftrightarrow \begin{cases} {}^tR . Y = b \\ R . X = Y \end{cases}$$

Ce qui donne : $Y = {}^t(0, 0, \frac{2}{\sqrt{11}})$ et $X = (\frac{-2}{11}, 0, \frac{4}{11})$

$E_R = \|X - X^{(2)}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -1/66 \\ 0 \\ 1/33 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1/33$ et $E_R(\|\cdot\|_1) = \frac{1}{22}$

enlever