L2-Info-A Janvier 2016.

Examen : Calcul Numérique

Exercice 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & a+1 & a^2+2a+3 & a \\ -1 & 1 & a & c^2+3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix}$

1) Sans faire de décomposition, montrer que $\forall (a,c) \in R^2$, $A = LU$.
2) Pour $a = 1$ et $c = 0$ faire : a) Résoudre $Ax = b$ par Gauss ordinaire.
b) Déduire LU de A, $det(A)$ et la solution de $Ax = {}^t(-1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$.
c) Calculer L^{-1}, U^{-1} et vérifier que $\rho(A) \geq 2$.

Exercice 2 Soit $f(x) = 6x - x^2 - 8 + 4\exp(\frac{x}{2})$, $x \in I = [0,1]$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$, admet une racine séparée $\xi \in I$.
-Vérifier que dichotomie est applicable à f sur I. Calculer x_0, x_1 et x_2.
2) Montrer que point fixe associé converge. Calculer x_1, x_2. ($x_0 = 0.5$)
-Calculer $\xi^* \approx \xi$ avec une précision $\epsilon = 0.5 \times 10^{-2}$. Arrondir au dernier **c.s.e.**
3) Montrer que Newton associé converge. Calculer x_1, x_2. ($x_0 = 0$)
-Calculer $\xi^* \approx \xi$ avec une précision $\epsilon = 0.5 \times 10^{-4}$. Arrondir au dernier **c.s.e.**
4) Soit $\psi : [a,b] \to R$ tq. $\psi' > -1$, $\psi(b) = a$. Montrer que $\psi([a,b]) \subset [a,b]$.

Exercice 3 Soit $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $a_{ij} = 3\min(i,j)$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 4i^2 + 5i$.
1) Ecrire la matrice A_4; donner la décomposition ${}^tRR$ de A_4. Généraliser.
2) Calculer $\det(B)$ et B^{-1} où $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, avec $b_{ii} = 2$ et $b_{ij} = 1$ si $i \neq j$.

Exercice 4 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ a & 1 & c \\ -c & c & 1 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ où $a, c \in R$.

1) Ecrire le processus de Jacobi et étudier sa convergence vers $S \in R^3$.
-Pour $a = c = \frac{1}{16}$; $X^{(0)} = b$, calculer une valeur approchée S^* de S avec une précision $\epsilon = 0.5 \times 10^{-2}$ en norme $\| \ \|_\infty$. Arrondir au dernier **c.s.e.**
2) Soit $X^{(m+1)} = MX^{(m)} + f$ et $X^{(0)} \in R^n$. Que peut-on dire si $\rho(M) = 0$?