Université de Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Niveau : Licence Mathématiques, 2ème année
Année : 2014-2015 , Semestre 4
Matière : Algèbre 4

Rattrapage

Lundi 07 Septembre 2015 - Durée : 1h30

Exercice 1 : (05 pts)
On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.
On considère l'application f qui à tout élément P de E associe la fonction polynomiale $f(P)$ de E, telle que :

$$f(P) = X(1-X)P' + 2XP$$

2iX

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice A de f par rapport à la base $(1, X, X^2)$.
3. Trouver les valeurs et les vecteurs propres de A.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : (05 pts)
Soit A la matrice de $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
3. Écrire une réduite de Jordan de A.
4. Calculer le polynôme minimal de A.
5. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 3 : (06 pts)
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la base $\mathcal{B} = \{1, X, ..., X^n\}$. Pour tout i de $\{0, ..., n\}$, on définit une forme linéaire f_i sur E par

$$\forall\, j \in \{0, ..., n\},\ f_i(X^j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i = j \\ 0 & \text{si } \ i \neq j \end{cases}$$

1. Démontrer que $(f_0, ..., f_n)$ est une base de E^*.
2. On considère les deux éléments ϕ et ψ de E^* définis par, pour tout $P \in E$, $\phi(P) = P(1)$ et $\psi(P) = P'(0)$. Déterminer les coordonnées de chacune des formes ϕ et ψ dans la base $(f_0, ..., f_n)$.

Exercice 4 : (04 pts)
Soit $\mathbb{R}^4$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4). Déterminer $\{e_4\}^{\perp}$.