

Rattrapage

Mercredi 18 mars 2015 - Durée : 1h30

Exercice 1 : (06 pts)

On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 12 & 1 & 10 & 9 & 11 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

- 1) Décomposer σ en produit de cycles disjoints.
- 2) Décomposer σ en produit de transpositions.
- 3) Écrire les inversions de σ .
- 4) Calculer la signature de σ et déterminer sa parité.
- 5) Sachant que $\sigma^{60} = \sigma_0$ (avec σ_0 est la permutation identique), calculer σ^{2015} .

Exercice 2 : (04 pts)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ impair, A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que :

$$B^k(AB) + A = 0$$

- 1) Montrer que : $((\det(B)^2) + 1) \det(A) = 0$.
- 2) La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 3 : (05 pts)

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 + x & x & x & \dots & x \\ x & a_2 + x & x & \dots & x \\ x & x & a_3 + x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & x & a_n + x \end{vmatrix}; \text{ où } a_1, a_2, \dots, a_n, x \text{ sont des réels.}$$

Exercice 4 : (05 pts)

On considère la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sin(a) & \sin(2a) \\ \sin(a) & 0 & \sin(2a) \\ \sin(2a) & \sin(a) & 0 \end{pmatrix}$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

- 1) Calculer $\det A$.
- 2) Trouver le polynôme caractéristique de A .
- 3) Donner les valeurs propres de A .