

✓ cas  $\frac{1}{r} \rightarrow 0$

Université Djilali Bounaâma

Faculté des sciences et de la technologie

Département : Mathématiques et Informatique

Niveau : L2 Mathématique. 2014/2015

Examen Final de la matière Analyse 4

**Exercice 1** : (1pt + 2pts + 3pts)

1) On considère l'ensemble  $\Delta$  :

$$\Delta = \{(x, y) \in [0, 1]^2, x \leq 1 - y^2\}.$$

(a) Tracer  $(\Delta)$ .

(b) Déterminer  $\int \int_{\Delta} dx dy$ .

(c) Déterminer  $\int \int_{\Delta} \frac{y(x+y^2)}{y^2+2} dx dy$  (On pourra utiliser le changement de variables  $x' = 1 - x$  et  $y' = y^2 + x$ )

**Exercice 2** : (1pt + 1, 5pts + 1, 5pts + 2pts + 1pt)

On considère la fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de  $f$  en  $(0, 0)$ .
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$  en  $(x, y)$ .
3. Calculer  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$
4. La fonction  $f$  est-elle différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  ?
5. La fonction  $f$  est-elle  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exercice 3** : (1pt + 1, 5pt + 3pts + 1, 5pts)

Soit les fonctions  $f$  et  $h$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définies par :

$$f(x, y) = (x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2, \quad h(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

et

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, h(x, y) = 0\}.$$

1. Dessiner l'ensemble  $S$ .
2. Préciser pourquoi  $f$  admet un minimum et un maximum sur  $S$ .
3. Déterminer les extrema de  $f$  sur  $S$ .
4. Pour chaque extremum de  $f$  sur  $S$  obtenu en un point  $(x_0, y_0)$ , dessiner la courbe de niveau correspondante,  $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ .

Bon courage et bon Ramadhan