Université Djilali BOUNAÂMA
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Niveau : Licence Mathématiques, $2^{ème}$ année
Année : 2014-2015 , Semestre 3
Matière : Algèbre 3

Examen final

Jeudi 22 Janvier 2015 - Durée : 1h30

Questions de Cours : (05 pts)
Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, k un scalaire.

1. Que signifie, A et B sont semblables.
2. Soit χ_A et χ_B les polynômes caractéristiques de A et B (respectivement). Montrer que : Si A et B sont semblables, alors : $\chi_A = \chi_B$.
3. Démontrer que : $det(kA) = k^n det(A)$.
4. Montrer que, si $det(A) \neq 0$ alors on a : $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

Exercice 1 : (05 pts)
On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 3 & 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles disjoints.
2. Décomposer σ en produit de transpositions.
3. Écrire les inversions de σ.
4. Calculer la signature de σ et déterminer sa parité.
5. Sachant que $\sigma^{12} = \sigma_0$ (avec σ_0 est la permutation identique), calculer σ^{147}.

Exercice 2 : (05 pts)
Calculer les déterminants suivants :

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$;

2) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$;

3) $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1+x & x & x & \dots & x \\ x & a_2+x & x & \dots & x \\ x & x & a_3+x & \dots & x \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & x & a_n+x \end{vmatrix}$; où $a_1, a_2, \cdots, a_n, x$ sont des réels.

Exercice 3 : (05 pts)
Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $detA$.
2. la matrice A est elle inversible ?
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?
5. Calculer la matrice inverse de A.