Université de Khemis Miliana
Faculte des sciences et de Téchnologie
Département MI

2^{eme} année Maths
Module : Analyse Numérique
13/06/2015

Examen N°02

Exercice 1 *On pose*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

1) Donner la décomposition LU de la matrice A (i.e. $A = LU$ avec L triangulaire inféréieure et U triangulaire supérieure).

2) En déduire la solution du systéme linéaire $Ax = b$ où

$$b = (1.5, 4, -14, -6.5)^t$$

3) Soit $B = U^T A L^T$. Sans calculs supplémentaires, donner une décomposition LU de la matrice B

Exercice 2 *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée $n \times n$ inversible telle que ses éléments diagonaux soient tous non nuls et soit b un vecteur de $\mathbb{R}^n$.*

On souhaite résoudre le système linéaire $Ax = b$ en utilisant la méthode itérative suivante:

α étant un réel non nul et le vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ étant donné, on construit la suit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par la formule de récurrence

$$x_{k+1} = (I - \alpha D^{-1}A)x_k + \alpha D^{-1}b \tag{1}$$

où I est la matrice identité et D la matrice diagonale constituée de la diagonale de A ($D_{ii} = A_{ii}$)

1 . Montrer que si la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\beta \in \mathbb{R}^n$ alors β solution du systéme linéaire $Ax = b$

2. Exprimer les coefficients de la matrice $M = (I - \alpha D^{-1}A)$ en fonction des coefficients de A

3. On suppose que A est à diagonale strictement dominante et que $0 < \alpha \leq 1$. Montrer que $\|M\|_\infty < 1$

4. Montrer que, sous les hypothèses de la question précédente, la methode itérative (1) converge

5. Qelle méthode étudiée en cours retrouve-t-on quand $\alpha = 1$?