Université Djilali Bounaâma(Khemis Miliana)
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques - Informatique.
2014 – 2015 , Niveau L2, Durée 1h30

Examen "Algèbre 4"

$\boxed{\texttt{Exercice 1}}$ (5 points)

1) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k et B^k sont aussi semblables.

2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{pmatrix}$, $(a \in \mathbb{R})$.

Déterminer a pour que 2 soit valeur propre de A.

3) On pose $a = -1$.

⊗ Montrer que A est diagonalisable, diagonaliser A.

⊗ Calculer la matrice A^{2015}, en utilisant la question 1).

$\boxed{\texttt{Exercice 2}}$ (2 points)

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\texttt{Exercice 2}}$ (7 points)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & a & -a \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.

2) En déduire que A n'est pas diagonalisable.

3) Donner une réduite de Jordan de A.

4) Sans faire des calculs, et en utilisant la réduite de Jordan, donner le polynôme minimal de A.

5) Montrer que $A^{-1} = -\left(A^2 + 3A + 3I_3\right)$.

$\boxed{\texttt{Exercice 3}}$ (6 points)

1) On considère la base suivante de $\mathbb{R}^3$: $\mathfrak{B} = \{u_1 = (1, -1, 3), u_2 = (0, 1, -1), u_3 = (0, 3, -2)\}$

Trouver la base duale $\mathfrak{B}^*= \{f_1, f_2, f_3\}$ de l'espace dual $(\mathbb{R}^3)^*$.

2) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré ≤ 2.

Soient Φ_1, Φ_2 et Φ_3 les formes linéaires sur E définies par $\Phi_1(P(t)) = \int_0^1 P(t)dt$, $\Phi_2(P(t)) = P'(1)$, $\Phi_3(P(t)) = P(0)$.Trouver la base $\mathfrak{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ de E, telle que $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ soit la base duale de $\mathfrak{B}$.

**********************(𝔅on ℭourage)*******************