Ministère de L'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique
Université de Khemis Miliana
2ième Maths

Exercice 1 *On veut calculer l'unique racine positive r de l'équation $f(x)=0$ où $f(x)=e^x-x-2$. On vous propose d'appliquer 2 méthodes de points fixes, basées sur les fonctions suivantes*

$$g_1(x)=\exp(x)-2 \quad et \qquad g_2(x)=\ln(x+2)$$

❶ *Comment ces fonctions g_1 et g_2 ont-elles été obtenues ? Detaillez vos réponses*

❷ *Dans quel intervalle de longueur 1 se trouve cette racine ? (justifier)*

❸ *En déduire si les méthodes de points fixes utilisant g_1 et g_2 convergent, et leur ordre de convergence le cas échéant.*

❹ *Faire 2 itérations à partir de $x_0=1$ pour chacune des 2 méthodes de point fixe.*

❺ *Appliquer la méthode de Newton à l'équation de départ et faites 2 itérations à partir de $x_0=1$*

❻ *Pour quelle(s) valeur(s) de x_0 ne peut -on pas démarrer la méthode de Newton.*

Exercice 2 *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $x_0,x_1,\dots,x_n$, $n+1$ points distincts de $[a,b]$. Soit f une fonction réelle définie et continue sur $[a,b]$. On note $\mathrm{P}_k(x)$ le polynôme d'interpolation de lagrange de f aux points $x_0,x_1,\dots,x_k$ et $f[x_0,x_1,\dots,x_k]$ le coefficient de son monôme de degré k, i.e.,*

$$\mathrm{P}_k(x)=f[x_0,x_1,\dots,x_k]\,x^k+\dots$$

① *Expliquer pourquoi $f[x_0,x_1,\dots,x_k]$ est indépandant de l'ordre de ses arguments $x_0,x_1,\dots,x_k$.*

② *Montrer que*

$$\mathrm{P}_k(x)-\mathrm{P}_{k-1}(x)=f[x_0,x_1,\dots,x_k](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1}) \tag{A}$$

③ *En déduire que (formule de Newton) :*

$$\mathrm{P}_n(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}f[x_0,x_1,\dots,x_k](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})$$

④ *Soit $k\geq 1$, considérons le polynôme P^*_{k-1} qui interpole f aux points $x_1,x_2,\dots,x_k$ et le polynôme $\mathrm{Q}_k(x)$ défini par*

$$\mathrm{Q}_k(x)=\frac{(x-x_0)\mathrm{P}^*_{k-1}-(x-x_k)\mathrm{P}_{k-1}(x)}{x_k-x_0}$$

En étudiant les propriétés de Q_k montrez que :

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\frac{f[x_1,x_2,\dots,x_k]-f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

⑤ *Démontrer, en utilisant la formule (A), la formule d'erreur :*

$$\mathrm{E}_n(x)=f(x)-\mathrm{P}_n(x)=f[x_0,x_1,\dots,x_n,x](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

.... Bonne Chance .... fin

2ème année Maths

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique du mardi 18 janvier 2015

Durée : 1h30 .

Aucun document n'est autorisé

Exercice I

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $x_0, x_1, \cdots, x_n$, $n+1$ points distincts de $[a, b]$. Soit f une fonction réelle définie et continue sur $[a, b]$. On note $P_k(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, x_1, \cdots, x_k$ et $f[x_0, \cdots, x_k]$ le coefficient de son monôme de degré k, i.e.

$$P_k(x) = f[x_0, \cdots, x_k]\, x^k + \cdots$$

1. Expliquez pourquoi $f[x_0, \cdots, x_k]$ est indépendant de l'ordre de ses arguments $x_0, \cdots, x_k$.

   Corrigé : Le polynôme d'interpolation P_k est unique une fois les points d'interpolation $x_0, \cdots, x_k$ donnés, il en est de même de son coefficient de plus haut degré.

2. Montrez que :

$$P_k(x) - P_{k-1}(x) = f[x_0, \cdots, x_k]\,(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \qquad (1)$$

   Corrigé : Par construction les polynômes P_k et P_{k-1} vérifient $P_k(x_i) = P_{k-1}(x_i) = f(x_i)$ pour $0 \leq i \leq k-1$, donc le polynôme $P_k - P_{k-1}$, de degré k a pour racines les k points x_i pour $0 \leq i \leq k-1$, il s'écrit donc $\alpha(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})$, mais son terme de plus haut degré est le même que celui de P_k, d'où le résultat.

3. En déduire que (formule de Newton) :

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \cdots, x_k]\,(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \qquad (2)$$

   Corrigé : En ajoutant membre à membre la relation précédente pour k de 1 à n et en remarquant que $P_0(x) = f[x_0] = f(x_0)$ on obtient la relation demandée.

4. Soit $k \geq 1$, considérons le polynôme $P^*_{k-1}(x)$ qui interpole f aux points $x_1, \cdots, x_k$ et le polynôme $Q_k(x)$ défini par

$$Q_k(x) = \frac{(x - x_0)P^*_{k-1}(x) - (x - x_k)P_{k-1}(x)}{x_k - x_0}.$$

En étudiant les propriétés de Q_k montrez que :

$$f[x_0, \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, \cdots, x_k] - f[x_0, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \tag{3}$$

Corrigé : On vérifie que : $Q_k(x_0) = P_{k-1}(x_0) = f(x_0)$ et que $Q_k(x_k) = P^*_{k-1}(x_k) = f(x_k)$ et pour $1 \leq i \leq k-1$ comme $P^*_{k-1}(x_i) = P_{k-1}(x_i) = f(x_i)$: $Q_k(x_i) = f(x_i)$. Et donc par unicité du polynôme de Lagrange $Q_k = P_k$, la relation demandée s'en déduit en examinant le coefficient du terme de plus haut degré de Q_k.

5. Démontrez, en utilisant la formule (1), la formule d'erreur :

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = f[x_0, \cdots, x_n, x]\,(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \tag{4}$$

Corrigé : De la formule (1) on déduit que l'expression

$$P_n(x) + f[x_0, \cdots, x_n, x]\,(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

est la valeur en x du polynôme de degré $(n+1)$ qui interpole f aux points $x_0, x_1, \cdots, x_n$ et x, et donc est égale à $f(x)$, d'où le résultat.

Exercice 2

(i) $f(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) + x = x$ (2 points)
$e^x - x - 2 = 0 \Longleftrightarrow e^x = x + 2 \Longleftrightarrow x = \ln(x+2)$

(ii) $f(1) = e - 3 < 0$ et $f(2) = e^2 - 4 > 0$, d'où l'intervalle $[1, 2]$

(iii) $g_1'(x) = e^x$. Si $1 \leq x \leq 2$, $e^1 \leq e^x \leq e^2$ donc la méthode de point fixe diverge.
$g_2'(x) = \frac{1}{2+x}$.

$$1 \leq x \leq 2 \Longleftrightarrow 3 \leq x + 2 \leq 4 \Longleftrightarrow \frac{1}{3} \geq \frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{4}$$

donc la méthode de point fixe converge car $g'(r) \leq \frac{1}{3}$ et elle est d'ordre 1 car $g'(r) \geq \frac{1}{4}$

(iv) $x_1 = g_1(1) = e - 2$, $x_2 = g_1(e) = e^{e-2} - 2$ (1 point)
$x_1 = g_2(1) = \ln(3)$, $x_2 = g_2(\ln(3)) = \ln(\ln(3) + 2) = 1.1309...$

(v) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{e^{x_n} - x_n - 2}{e^{x_n} - 1}$ $x_1 = \frac{2}{e-1} = 1.1639...$, $x_2 = 1.1464...$ (2 points)

(vi) Les valeurs pour lesquelles $f'(x_0) = 0$, c'est-à-dire $x_0 = 0$.