Université Université Djilali Bounaâma
Faculté des sciences et de la technologie
Département des Mathématiques et Informatiques
Semestre S4 2014/2015

Examen de Topologie

Instructions :

1• Pour chaque question il faut justifier et argumenter les réponses.
2• Inscrivez tout d'abord vos nom, prénom et votre section.

Exercice1

Soit $\mathcal{S}$ l'espace des suites réelles. Pour $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_n)$ et $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_n)$ dans $\mathcal{S}$, on pose

$$\mathrm{d}(x, y) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \frac{|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n|}{1 + |\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n|}.$$

1. Montrer que d est bien définie.
2. Montrer que d est une distance sur $\mathcal{S}$

Exercice2

Soient $\mathbf{p} > 1$ et $\mathbf{q} > 1$ tel que

$$\frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{q}} = 1,$$

1. Montrer que pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \geq 0$:

$$\mathrm{ab} \leq \frac{1}{\mathrm{p}} \mathrm{a}^p + \frac{1}{\mathrm{q}} \mathrm{b}^q.$$

Indication: utilisere la relation suivante

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall \mathrm{x}, \mathrm{y} > 0 : \lambda \log(\mathrm{x}) + (1 - \lambda) \log(\mathrm{y}) \leq \log(\lambda \mathrm{x} + (1 - \lambda) \mathrm{y}).$$

2. Pour $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathrm{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{x}_i|^p \right)^{1/p}, \|\mathbf{y}\|_{\mathrm{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{y}_i|^q \right)^{1/q}.$$

Montrer que

$$\frac{|\mathbf{x}_i . \mathbf{y}_i|}{\|\mathbf{x}\|_{\mathrm{p}} \|\mathbf{y}\|_{\mathrm{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|\mathbf{x}_i|}{\|\mathbf{x}\|_{\mathrm{p}}} + \frac{1}{q} \frac{|\mathbf{y}_i|}{\|\mathbf{y}\|_{\mathrm{q}}}.$$

Exercice2

Soit $\mathbf{E} = \mathbf{C}^2([0,1];\mathbb{R})$

Pour $\mathbf{f} \in \mathbf{E}$, On pose

$$\mathbf{N}(\mathbf{f}) = \int_0^1 |\mathbf{f}(t)| \, \mathbf{dt}$$

$$\mathbf{N}'(\mathbf{f}) = |\mathbf{f}(0)| + \int_0^1 |\mathbf{f}'(t)| \, \mathbf{dt}$$

$$\mathbf{N}''(\mathbf{f}) = |\mathbf{f}(0)| + |\mathbf{f}'(0)| + \int_0^1 |\mathbf{f}''(t)| \, \mathbf{dt}$$

1. Montrer que sont des normes sur E
2. Comparer les trois normes.