

ÉPREUVE : LOGIQUE MATHÉMATIQUE.**Exercice 1)**

(5pts=1+1+1+2)

Montrer que : $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B \models A \rightarrow (A \rightarrow C)$ utilisant :

- La table de vérité
- Les équivalences remarquables de la logique propositionnelle.
- Le système axiomatique de Hilbert.
- La résolution de Robinson.

Exercice 2)

- Calculer une forme normale disjonctive de : $(p_1 \rightarrow q_1) \wedge (p_2 \rightarrow q_2)$. (4.5pts=1.5+2+1)
- Soit la formule $\beta_n = (p_1 \rightarrow q_1) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q_n)$. Supposons que la $FND(\beta_n) = C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_m$ avec C_i des clauses distinctes. Donner une relation de récurrence pour calculer la FND de la formule $\beta_{n+1} = (p_1 \rightarrow q_1) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q_n) \wedge (p_{n+1} \rightarrow q_{n+1})$.
- Déterminer la fonction $f(n)$ qui donne le nombre de clauses de la FND d'une formule β_n .

Exercice 3)

(6pts=1*3+1*3)

On considère le langage du premier ordre formé de 3 prédicats unaires P , I et Pr , un prédicat binaire E et d'un symbole de constante 2. On interprète $P(x)$ par «x est pair»; $I(x)$ par «x est impair»; $Pr(x)$ par «x est premier»; $E(x,y)$ par «x = y».

- Exprimer par une formule logique chacune des phrases suivantes :
 - Tous les nombres pairs sauf le nombre 2 ne sont pas premiers.
 - Tous les nombres premiers sauf le nombre 2 sont impairs.
 - Certains nombres premiers sont pairs et d'autres sont impairs.
- Exprimer en langage naturel chacune des 3 formules suivantes :
 - $(\exists x Pr(x) \wedge P(x)) \wedge (\exists x Pr(x) \wedge I(x))$
 - $\forall x (P(x) \wedge \neg E(x,2) \rightarrow Pr(x))$
 - $\forall x (Pr(x) \wedge \neg E(x,2) \rightarrow I(x))$

Exercice 4)

(4.5pts=1.5+1.5+1.5)

- Donner un modèle de l'ensemble Ω : (P est un prédicat, g est une fonction et b est une constante).

$$\Omega : \left\{ \begin{array}{l} P(x,z) \wedge P(y,z) \rightarrow (x = z); \forall x (g(x,b) = -x); \forall x \forall y \forall z (g(g(x,y),z) = g(x,g(y,z))) \\ \forall x \exists y (g(x,y) = b); \forall x \forall y (g(x,y) = g(y,x)) \end{array} \right\}$$
- Mettre en forme normale **préfixe** la formule suivante : $\forall x \forall y P(x,y,z) \rightarrow \exists z R(x,z) \vee R(z,y)$.
- Mettre en forme normale de **Skolem** la formule suivante : $\forall y \exists x (P(x) \wedge \neg M(y,x)) \leftrightarrow \exists z M(z,x)$.

Bon Courage !