2 . L . S . C

Université Djillali Liabes
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique

Année : 18/19

Logique / Corrigé / Examen

Exercice 1 (06pts). Soient F et G deux formules du calcul propositionnel. On suppose que les variables propositionnelles de F et de G sont distinctes. On fait un raisonnement par contraposition : On montre que si les deux affirmations suivantes sont fausses :

0,5

- soit $\models \neg F$.
- soit $\models G$.

Alors l'affirmation $\models (F \to G)$ est fausse.

On suppose donc que les deux affirmations suivantes sont fausses :

01,5

- soit $\models \neg F$.
- soit $\models G$.

Alors $\neg F$ et G ne sont pas des tautologies. D'où :

- il existe une valuation v telle que $v(\neg F) = 0$, donc $v(F) = 1$;
- et il existe une valuation u telle que $u(G) = 0$.

On considère la valuation w satifaisant à :

02,5

$$w(p) = \begin{cases} v(p) & \text{si } p \text{ est une variable de } F, \\ u(p) & \text{si } p \text{ est une variable de } G. \end{cases}$$

Cette valuation w est bien définie puisque, par hypothèse, les variables de F et de G sont distinctes.
De plus, on a $w(F) = v(F)$ et $w(G) = u(G)$.

01,5

On a alors $w((F \to G)) = 0$ car $w(F) = v(F) = 1$ et $w(G) = u(G) = 0$; d'où $(F \to G)$ n'est pas une tautologie. Donc l'affirmation $\models (F \to G)$ est fausse.

Exercice 2 (04pts).

(1) Représentation en calcul propositionnel des trois propositions :

0,5

On pose
p := Mustapha vient à Sidi-Bel-Abbes
q := Ali vient à Sidi-Bel-Abbes
r := Omar vient à Sidi-Bel-Abbes

Alors,

0,5

- $((p \wedge q) \to r)$ représente : Si Mustapha et Ali viennent à Sidi-Bel-Abbes, alors Omar viendra aussi.
- $(q \to p)$ représente : Si Ali vient à Sidi-Bel-Abbes, alors Mustapha viendra aussi.
- $(q \vee r)$ représente : Ali ou Omar, l'un des deux au moins, viendra à Sidi-Bel-Abbes.

(2) Déduction :

01.

En choisisant la valuation v_0 définie par $v_0(p) = 0$, $v_0(q) = 0$, $v_0(r) = 1$;

- on a

$$[v_0(((p \wedge q) \to r)) = 1, v_0((q \to p)) = 1, v_0((q \vee r)) = 1] \text{ et } [v_0(p) = 0] \ .$$

Donc on ne peut pas déduire que Mustapha vient à Sidi-Bel-Abbes.

0,5

- On a aussi

$$[v_0(((p \wedge q) \to r)) = 1, v_0((q \to p)) = 1, v_0((q \vee r)) = 1] \text{ et } [v_0(q) = 0] \ .$$

Donc on ne peut pas déduire que Ali vient à Sidi-Bel-Abbes.

0,5

- Par contre, si on prend une valuation v qui ne satisfait pas r alors v ne satifait pas toutes les formules de $\Sigma = \{((p \wedge q) \to r), (q \to p), (q \vee r)\}$ à la fois. D'où $\Sigma \models r$. Donc on peut déduire que Omar vient à Sidi-Bel-Abbes.

01.

Dans ce cas on donne une preuve par la méthode de réfutation par résolution :
A Σ on associe $\mathcal{S} = \{(\neg p \vee \neg q \vee r), (\neg q \vee p), (q \vee r)\}$ et à $\neg r$ on associe $\mathcal{S}' = \{\neg r\}$.

$$\begin{array}{rcc}
C_1 = & (\neg p \vee \neg q \vee r) & \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}' \\
C_2 = & (\neg q \vee p) & \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}' \\
C_3 = & (\neg q \vee r) & \frac{C_1 \quad C_2}{C_3} \text{ sur } p \\
C_4 = & (q \vee r) & \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}' \\
C_5 & r & \frac{C_3 \quad C_4}{C_5} \text{ sur } q \\
C_6 = & \neg r & \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}' \\
C_7 & \Box & \frac{C_5 \quad C_6}{C_7} \text{ sur } r
\end{array}$$

D'où $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}' \vdash \Box$ et, par conséquent $\Sigma \models r$.

Exercice 3 (10pts).

On considère le langage du premier ordre $\mathscr{L} = \{R\}$ où R est un prédicat d'arité 2 et les $\mathscr{L}$-structures $\mathscr{M} = (M, R^{\mathscr{M}})$.

(A) $M = \mathbb{N}$ et R réalisé par $<$:

03.

(1) $\mathscr{M} \models \forall x \forall y \forall z((\neg Rxx \wedge (Rxy \to \neg Ryx)) \wedge ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz))$ ssi
pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, pour tout $\beta \in \mathbb{N}$, pour tout $\gamma \in \mathbb{N}$, $[[(\alpha \geq \alpha)$ et [si $(\alpha < \beta)$ alors $(\beta \geq \alpha)]]$ et [si $[(\alpha < \beta)$ et $(\beta < \gamma)]$ alors $(\alpha < \gamma)]]$: VRAI.

(2) $\mathscr{M} \models \exists x \forall y Rxy$ ssi
il existe $\alpha \in \mathbb{N}$, pour tout $\beta \in \mathbb{N}$, $(\alpha < \beta)$: FAUX.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, En choisissant $\beta = 0$, $(\alpha \geq \beta)$.

(3) $\mathscr{M} \models \forall x \exists y Ryx$ ssi
pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, il existe $\beta \in \mathbb{N}$, $(\beta < \alpha)$: FAUX.
En choisissant $\alpha = 0$, pour tout $\beta \in \mathbb{N}$, $(\beta \geq \alpha)$.

(4) $\mathscr{M} \models \forall x \exists y (Rxy \wedge \forall z (Rxz \to (z = y \vee Ryz)))$ ssi
pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, il existe $\beta \in \mathbb{N}$, $[(\alpha < \beta)$ et pour tout $\gamma \in \mathbb{N}$, [si $(\alpha < \gamma)$ alors $[(\gamma = \beta)$ ou $(\beta < \gamma)$]]] : VRAI.
pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, En choisissant $\beta = \alpha + 1$, $[(\alpha < \beta)$ et pour tout $\gamma \in \mathbb{N}$, [si $(\alpha < \gamma)$ alors $[(\gamma = \beta)$ ou $(\beta < \gamma)$]]].

(5) $\mathscr{M} \models \forall x \exists y (Rxy \to \exists z (Rxz \wedge Rzy))$ ssi
pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, il existe $\beta \in \mathbb{N}$ [si $(\alpha < \beta)$ alors il existe $\gamma \in \mathbb{N}$, $[(\alpha < \gamma)$ et $(\gamma < \beta)]]$: VRAI.
pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, en choisissant $\beta = \alpha + 2$, [si $(\alpha < \beta)$ alors, en prenant $\gamma = \alpha + 1$, $[(\alpha < \gamma)$ et $(\gamma < \beta)]]$

(B) $M = \mathbb{Q}$ et R réalisé par $<$:

03.

(1) $\mathscr{M} \models \forall x \forall y \forall z((\neg Rxx \wedge (Rxy \to \neg Ryx)) \wedge ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz))$ ssi
pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, pour tout $\beta \in \mathbb{Q}$, pour tout $\gamma \in \mathbb{Q}$, $[[(\alpha \geq \alpha)$ et [si $(\alpha < \beta)$ alors $(\beta \geq \alpha)]]$ et [si $[(\alpha < \beta)$ et $(\beta < \gamma)]$ alors $(\alpha < \gamma)]]$: VRAI.

(2) $\mathscr{M} \models \exists x \forall y Rxy$ ssi
il existe $\alpha \in \mathbb{Q}$, pour tout $\beta \in \mathbb{Q}$, $(\alpha < \beta)$: FAUX.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, en choisissant $\beta = -|\alpha|$, $(\alpha \geq \beta)$.

(3) $\mathscr{M} \models \forall x \exists y Ryx$ ssi
pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, il existe $\beta \in \mathbb{Q}$, $(\beta < \alpha)$: VRAI.
pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, en prenant $\beta = \alpha - 1$, $(\beta < \alpha)$.

(4) $\mathscr{M} \models \forall x \exists y (Rxy \wedge \forall z (Rxz \to (z = y \vee Ryz)))$ ssi
pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, il existe $\beta \in \mathbb{Q}$, $[(\alpha < \beta)$ et pour tout $\gamma \in \mathbb{Q}$, [si $(\alpha < \gamma)$ alors $[(\gamma = \beta)$ ou $(\beta < \gamma)$]]] : FAUX.
En choisissant $\alpha = 0$, pour tout $\beta \in \mathbb{Q}$, $[(\alpha \geq \beta)$ ou , en prenant $\gamma = \frac{\beta}{2}$, [$(\alpha < \gamma)$ et $[(\gamma \neq \beta)$ et $(\beta \geq \gamma)$]]]

(5) $\mathscr{M} \models \forall x \exists y (Rxy \to \exists z (Rxz \wedge Rzy))$ ssi
pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, il existe $\beta \in \mathbb{Q}$, [si $(\alpha < \beta)$ alors il existe $\gamma \in \mathbb{Q}$, $[(\alpha < \gamma)$ et $(\gamma < \beta)]$: VRAI.
pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, en prenant $\beta = \alpha + 1$, [si $(\alpha < \beta)$ alors en prenant $\gamma = \alpha + \frac{1}{2}$, $[(\alpha < \gamma)$ et $(\gamma < \beta)]$

(C) $M = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ et R est réalisé par $\subset$ sens strict :

04-

(1) $\mathscr{M} \models \forall x \forall y \forall z ((\neg Rxx \wedge (Rxy \to \neg Ryx)) \wedge ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz))$ ssi
pour tout $\alpha \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, pour tout $\beta \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, pour tout $\gamma \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, [[$(\alpha \not\subset \alpha)$ et [si $(\alpha \subset \beta)$ alors $(\beta \not\subset \alpha)$]] et [si [$(\alpha \subset \beta)$ et $(\beta \subset \gamma)$] alors $(\alpha \subset \gamma)$]] : VRAI.

(2) $\mathscr{M} \models \exists x \forall y Rxy$ ssi
il existe $\alpha \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, pour tout $\beta \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $(\alpha \subset \beta)$: FAUX.
Pour tout $\alpha \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, en choisissant $\beta = \emptyset$, $(\alpha \not\subset \beta)$

(3) $\mathscr{M} \models \forall x \exists y Ryx$ ssi
pour tout $\alpha \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, il existe $\beta \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $(\beta \subset \alpha)$: FAUX.
En choisissant $\alpha = \emptyset$, pour tout $\beta \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $(\beta \not\subset \alpha)$

(4) $\mathscr{M} \models \forall x \exists y (Rxy \wedge \forall z (Rxz \to (z = y \vee Ryz)))$ ssi
pour tout $\alpha \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, il existe $\beta \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, [$(\alpha \subset \beta)$ et pour tout $\gamma \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, [si $(\alpha \subset \beta)$ alors [$(\gamma = \beta)$ ou $(\beta \subset \gamma)$]]] : FAUX.
En choisissant $\alpha = \mathbb{N}$, pour tout $\beta \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, [$(\alpha \not\subset \beta)$ ou, en prenant $\gamma = \emptyset$, [$(\alpha \subset \beta)$ et [$(\gamma \neq \beta)$ et $(\beta \not\subset \gamma)$]]]

(5) $\mathscr{M} \models \forall x \exists y (Rxy \to \exists z (Rxz \wedge Rzy))$ ssi
pour tout $\alpha \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, il existe $\beta \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, [si $(\alpha \subset \beta)$ alors il existe $\gamma \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, [$(\alpha \subset \gamma)$ et $(\gamma \subset \beta)$] : VRAI.
Pour tout $\alpha \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, en prenant $\beta = \emptyset$, [si $(\alpha \subset \beta)$, alors il existe $\gamma \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, [$(\alpha \subset \gamma)$ et $(\gamma \subset \beta)$]