Université Mohamed Seddik Ben Yahia de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département d'Informatique

Date : 3 /02/2018
L2– Informatique

Examen du Logique Mathématique

(Durée 1h30)

Exercice 1 *(6 points)* On considère les raisonnements suivants :

a. Si le chat survient, les souris disparaissent,
or le chat survient,
donc les souris disparaissent.

b. Si le chat survient, les souris disparaissent,
or les souris disparaissent,
donc le chat survient.

c. Si le chat survient, les souris disparaissent,
or le chat ne survient pas,
donc les souris ne disparaissent pas.

d. Si le chat survient, les souris disparaissent,
or les souris ne disparaissent pas,
donc le chat ne survient pas.

1) À l'aide des variables propositionnelles p et q représentant respectivement les propositions « le chat survient » et « les souris disparaissent », représenter chacun des raisonnements a, b, c et d par des formules de la logique propositionnelle.

2) Lesquels, parmi les raisonnements a, b, c et d, sont corrects et lesquels sont incorrects ? justifier.

Exercice 2 *(6 points)*

1) Montrer dans la théorie T que : $\vdash (B\to\neg A) \to((\neg B \to\neg(C\to\neg A)) \to((A\to \neg C) \to\neg A))$

2) Par la déduction naturelle, montrer $q \to (\neg q \lor r) , q \to (p \land \neg r) \vdash q \land r$

Exercice 3 *(8 points).*

1. On se place dans un langage avec deux symboles de prédicat binaire P et A. Soient les trois formules de la logique du premier ordre suivantes :
   – $F1$: $\forall x, \exists y, P(x, y)$
   – $F2$: $\forall x\ y\ z, ((P(x, y) \land P(y, z))\Rightarrow A(x, z))$
   – $F3$: $\forall x, \exists y, A(x, y)$
   a . Mettre en forme FNC les formules $F1$ et $F2$ et $\neg F3$. On prendra soin d'expliciter les symboles de skolem introduits.
   b. Montrez **en utilisant la méthode de résolution** que la formule $F3$ est conséquence logique des formules $F1$ et $F2$.
2. On se place maintenant dans un langage avec deux symboles de prédicat unaires P et Q. Soit la formule
   $F : \exists x,\ \forall y,\ \forall z,((P(y)\Rightarrow Q(z))\Rightarrow(P(x)\Rightarrow Q(x)))$

   Que peut-on en dire sur la validité de F ? Justifier votre réponse

Soit le système d'axiomes du calcul propositionnel :

A1 : $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2 : $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

A3 : $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

et la règle du Modus Ponens : $A, A \rightarrow B \vdash B$.

Soit le système de déduction :

$$\frac{A \rightarrow B,\ A}{B}\ \textbf{(MP)} \qquad \frac{A \rightarrow B,\ \neg B}{\neg A}\ \textbf{(MT)}$$

$$\frac{A\ ,\ B}{A \wedge B}\ \textbf{(i}\wedge\textbf{)} \qquad \frac{A \wedge B}{A}\ \textbf{(e1}\wedge\textbf{)} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \textbf{(e2}\wedge\textbf{)}$$

$$\frac{A}{A \vee B}\ \textbf{(i1}\vee\textbf{)} \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \textbf{(i2}\vee\textbf{)} \qquad \frac{T \vdash A \vee B \quad T, A \vdash C \quad T, B \vdash C}{C}\ \textbf{(e}\vee\textbf{)}$$

$$\frac{T, A \vdash B}{T, \vdash A \rightarrow B}\ \textbf{(i}\rightarrow\textbf{)} \qquad \frac{T,\ A \vdash \bot}{\neg A}\ \textbf{(i}\neg\textbf{)}$$

$$\frac{A \quad \neg A}{\bot}\ \textbf{(e}\neg\textbf{)} \qquad \frac{\bot}{A}\ \textbf{(efalso)} \qquad \frac{\neg A \vdash \bot}{A}\ \textbf{(double}\ \neg\textbf{)}$$

Bon courage